Flott Formel

Jostein Trondal

2. utgave

Mars 2015

Forord

Dette heftet startet sitt liv i perioden 2008-2015 som separate, skreddersydde formelsamlinger til ulike matematikkurs på UiA i Grimstad. I 2013 ble de ulike samlingene kombinert til første utgave, og bar da preg av en del overlappinger og tilfeldig struktur. I 2015 ble det foretatt en fullstendig revisjon av heftet til 2. utgave; fjerning av overlapping, bedre typografi, flere figurer, flere emner, fyldigere innholdsfortegnelse, register, flere integraler og i det hele tatt en bedre strukturering av stoffet.

Mesteparten av innholdet er så å si "standard" matematikk i noen grunnleggende emner på universitetsnivå, men noe av innholdet er ukonvensjonelt med tanke på notasjon. Et eksempel er eksponentnotasjonen for integraler, som beskrevet i kapittel 5.52. Min påstand er at denne notasjonen gjør integralregning enklere.

Denne formelsamlingen er fritt tilgjengelig på nettet (se `trondal.com/flottformel`). Men jeg setter pris på om den blir kjøpt av de som har bruk for den. Dessuten må studentene ved UiA ha en kjøpt utgave hvis de har tenkt å bruke den på eksamen. Gå til nettadressen for informasjon om kjøp. Der vil det også ligge informasjon om rettelser til denne utgaven.

Kommentarer og rettelser er meget velkomne. Hvis det er et emne du savner så er det mulig jeg kan legge det til i neste utgave. Tusen takk for innspill og rettelser så langt til Svein Olav Nyberg, Hans Herlof Grelland, Xin He, Erik Yggeseth, Torgeir Attestog, Bjørn Øyvind Halvorsen, Asbjørn Sandnes og Leon Marbl.

Dette er 2. utgave.

Jostein@Trondal.no, 2. mars 2015

Referanser

Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (1970). *Handbook of mathematical functions* (9. utg.). Dover Publications.

Adams, R. & Essex, C. (2013). *Calculus: A complete course* (7. utg.). Pearson.

George B. Thomas, J. (2005). *Thomas' Calculus* (M. Weir, J. Hass & F.R. Giordano, red.). Pearson Addison Wesley.

Goldstein, H., Charles P. Poole, J. & Safko, J.L. (2000). *Classical mechanics* (3. utg.). Addison Wesley.

Gulliksen, T. (1998). *Matematikk i praksis*. Universitetsforlaget.

Haugan, J. (2007). *Formler og tabeller*. NKI Forlaget.

Jahren, O.H. & Knutsen, K.J. (2000). *Formelsamling i matematikk* (6. utg.). Tapir Akademisk Forlag.

Kohler, W. & Johnson, L. (2006). *Elementary differential equations*. Pearson Addison Wesley.

Lay, D.C. (2006). *Linear algebra and its applications*. Pearson Addison Wesley.

Utdanningsdirektoratet. (2001). *Formelsamling i matematikk*. Gyldendal.

Innhold

1 Noen grunnleggende emner

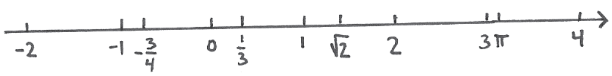
1.1 Mengder

En **mengde** er en samling av **elementer**. Følgende notasjon kan brukes, der S og T er mengder:

$a \in S$	a er element i S
$a \notin S$	a er ikke element i S
$S \cup T$	**Unionen** av S og T (inneholder alle elementer i S og T til sammen)
$S \cap T$	**Snittet** av S og T (inneholder alle elementer felles for S og T)
$\emptyset$	Den **tomme mengden** (inneholder ingen elementer)
$S \subseteq T$	S er en **delmengde** av T (T inneholder minst alle elementene til S)

1.2 Tall

Tall kan beskrives som punkter på en **tallinje**:

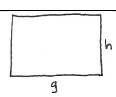
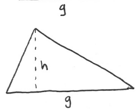
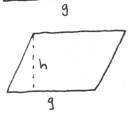
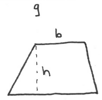
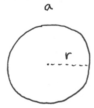
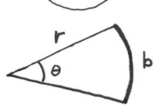


Tall kan også defineres som mengdene $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ slik:

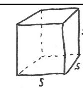
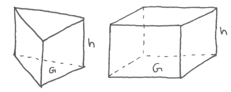
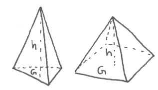
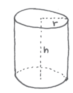
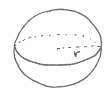
$$\begin{aligned} \textbf{Naturlige tall } \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ \textbf{Hele tall } \mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\ \textbf{Rasjonale tall } \mathbb{Q} &= \frac{a}{b} \quad \text{der } a, b \in \mathbb{Z} \text{ og } b \neq 0 \\ \textbf{Reelle tall } \mathbb{R} &= \text{Alle tall på tallinjen} \\ \textbf{Irrasjonale tall } &= \text{Reelle tall som ikke er rasjonale} \end{aligned}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

1.3 Geometriske figurer i planet

Figur	Areal		Omkrets
Rektangel	gh		$2(g+h)$
Trekant	$\frac{gh}{2}$		
Parallellogram	gh		
Trapes	$\frac{(a+b)h}{2}$		
Sirkel	πr^2		$2\pi r$
Sektor	$\frac{1}{2}r^2\theta$		$b = r\theta$

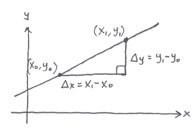
1.4 Geometriske figurer i rommet

Figur	Volum		Overflate
Kube	s^3		$6s^2$
Prisme	Gh		
Pyramide	$\frac{Gh}{3}$		
Sylinder	$\pi r^2 h$		$2\pi r(r+h)$
Kjegle	$\frac{\pi r^2 h}{3}$		$\pi r(r+s)$
Kule	$\frac{4\pi r^3}{3}$		$4\pi r^2$

1.5 Linjer i planet

Stigningstallet m til en ikkevertikal linje gjennom punktene (x_0, y_0) og (x_1, y_1) er definert som

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



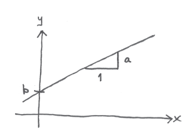
En linje med stigningstall m som går gjennom punktet (x_1, y_1) kan beskrives med likningen

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

En **horisontal linje** gjennom punktet (x_1, y_1) kan derfor beskrives med likningen $y = y_1$. En **vertikal linje** gjennom punktet (x_1, y_1) kan beskrives med likningen $x = x_1$.

En linje med **stigningstall** m og **konstantledd** b kan beskrives med likningen

$$y = mx + b$$



Alle linjer kan skrives på **normalformen**

$$Ax + By = C$$

der A og B ikke begge er lik null.

Hvis to ikke-vertikale linjer L_1 og L_2 står **vinkelrett** på hverandre, så vil deres stigningstall m_1 og m_2 tilfredsstille likningen $m_1 m_2 = -1$, dvs:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \qquad \text{og} \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

1.6 Andregradslikningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hvis $x = x_0$ og $x = x_1$ er løsninger av $ax^2 + bx + c = 0$, så har vi følgende:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$$
$$x_0 + x_1 = -\frac{b}{a}$$
$$x_0 \cdot x_1 = \frac{c}{a}$$

1.7 Fullstendig kvadrat

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$ax^{2n} + bx^n + c = a\cdot\left(x^n + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

1.8 Avstand i planet

Avstanden d i planet mellom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2 Kjeglesnitt

2.1 Generelt kjeglesnitt

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

2.2 Linje

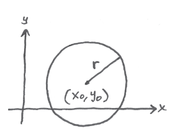
$$Ax + By = C$$

2.3 Punkt

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = 0$$

2.4 Sirkel

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



2.5 Parabel med akse || med y-aksen

$$y = ax^2 + bx + c$$

Akse: $x = -\frac{b}{2a} = x_0$

Toppunkt: $\left(x_0, y_0 = -\frac{b^2}{4a} + c\right)$

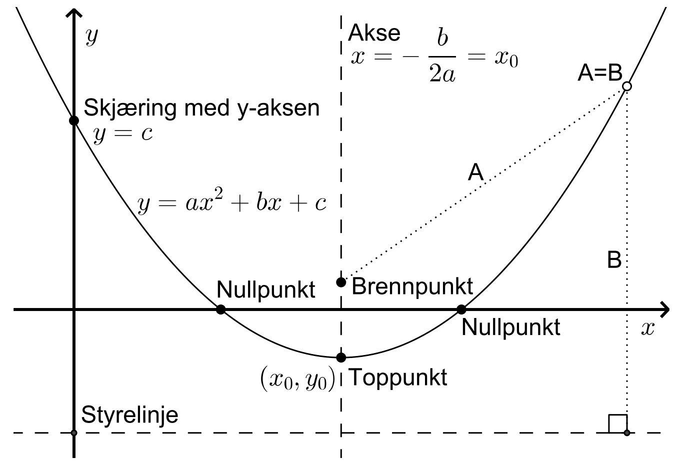
$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Brennpunkt: $\left(x_0, y_0 + \frac{1}{4a}\right)$

Styrelinje: $y = y_0 - \frac{1}{4a}$

Nullpunkter: $x = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - \frac{c}{a}}$

Skjæring med y-aksen: $y = c$



2.6 Parabel med akse || med x-aksen

$$x = ay^2 + by + c$$

Akse: $y = -\frac{b}{2a} = y_0$

Toppunkt: $\left(x_0 = -\frac{b^2}{4a} + c, y_0\right)$

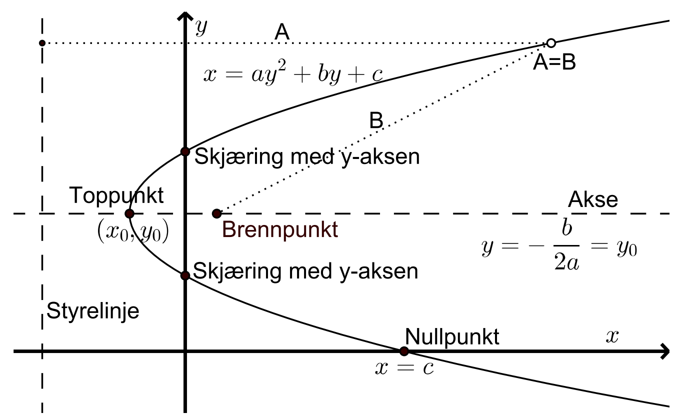
$$x = a(y - y_0)^2 + x_0$$

Brennpunkt: $\left(x_0 + \frac{1}{4a}, y_0\right)$

Styrelinje: $x = x_0 - \frac{1}{4a}$

Nullpunkter: $y = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - \frac{c}{a}}$

Skjæring med x-aksen: $x = c$



2.7 Hyperbel med brennpunkter || med x-aksen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Senter: (x_0, y_0)

Senter-toppunkt $= a$

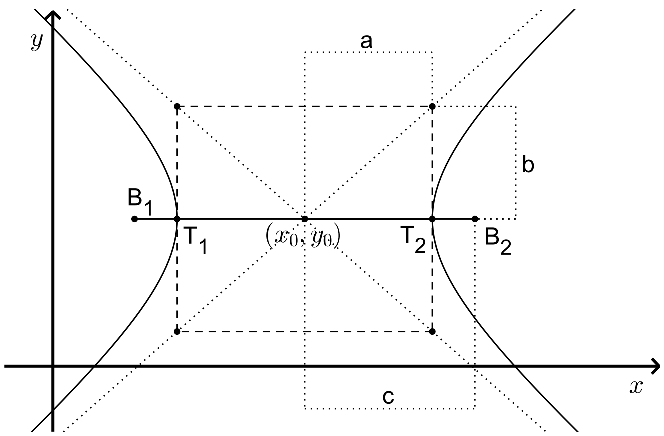
Toppunkt: $(x_0 \pm a, y_0)$

Senter-brennpunkt $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Brennpunkt: $(x_0 \pm c, y_0)$

Eksentrisitet $\varepsilon = \dfrac{c}{a} \in \langle 1, \infty \rangle$

Asymptoter: $y = \pm \dfrac{b}{a}(x - x_0) + y_0$



2.8 Hyperbel med brennpunkter || med y-aksen

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$$

Senter: (x_0, y_0)

Senter-toppunkt $= b$

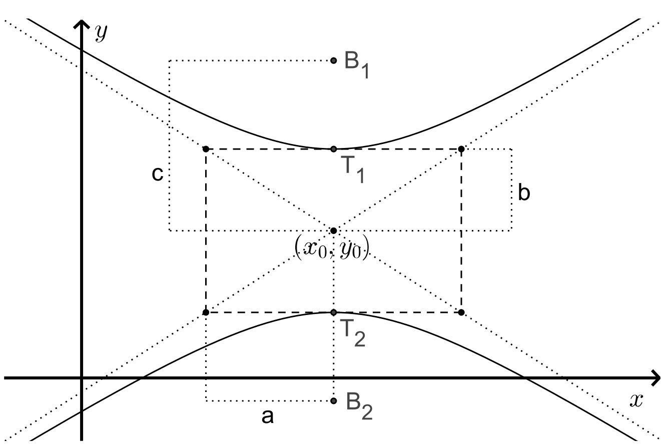
Toppunkt: $(x_0, y_0 \pm b)$

Senter-brennpunkt $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Brennpunkt: $(x_0, y_0 \pm c)$

Eksentrisitet $\varepsilon = \dfrac{c}{b} \in \langle 1, \infty \rangle$

Asymptoter: $y = \pm \dfrac{b}{a}(x - x_0) + y_0$



2.9 Ellipse

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

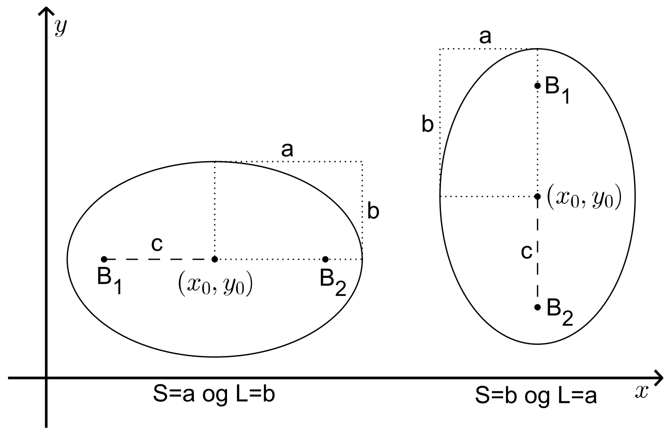
Senter: (x_0, y_0)

Storeradius $= S = \max(a, b)$

Lilleradius $= L = \min(a, b)$

Senter-brennpunkt $c = \sqrt{S^2 - L^2}$

Eksentrisitet $\varepsilon = \dfrac{c}{S} \in [0, 1\rangle$

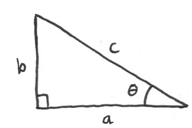


3 Trigonometri

3.1 Pytagoras' setning

I en **rettvinklet trekant** med **katetlengder** a og b og **hypotenuslengde** c så har vi

$$a^2 + b^2 = c^2$$



3.2 Definisjon av sin, cos og tan

De trigonometriske funksjonene relateres til sidelengdene i en rettvinklet trekant på følgende måte:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \tfrac{b}{c} & \csc(\theta) &= \tfrac{1}{\sin(\theta)} = \tfrac{c}{b} \\ \cos(\theta) &= \tfrac{a}{c} & \sec(\theta) &= \tfrac{1}{\cos(\theta)} = \tfrac{c}{a} \\ \tfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) &= \tfrac{b}{a} & \cot(\theta) &= \tfrac{1}{\tan(\theta)} = \tfrac{a}{b} \end{aligned}$$

3.3 Enhetsformelen

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

3.4 Grader og radianer

Sammenhengen mellom en vinkel n° i **grader** og en vinkel θ i **radianer**:

$$\theta = \frac{n^\circ}{360^\circ} 2\pi$$

Grader til radianer: $r = \frac{g^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \approx \frac{g^\circ}{57.296}$

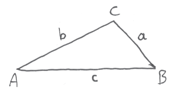
Radianer til grader: $g^\circ = \frac{r}{2\pi} \cdot 360^\circ \approx r \cdot 57.296$

3.5 Egenskaper til vilkårlige trekanter

$$\text{Areal} = \tfrac{1}{2}bc\cdot\sin(A)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(A)$$

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$



3.6 Eksakte trigonometriske verdier

θ		grader	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
0	$= 0.000$	$0°$	0	1	0
$\pi/6$	$= 0.524$	$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$= 0.785$	$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$= 1.047$	$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	$= 1.571$	$90°$	1	0	$\pm\infty$
$2\pi/3$	$= 2.094$	$120°$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$= 2.356$	$135°$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$= 2.618$	$150°$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	$= 3.142$	$180°$	0	-1	0
$7\pi/6$	$= 3.665$	$210°$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$5\pi/4$	$= 3.927$	$225°$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
$4\pi/3$	$= 4.189$	$240°$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$
$3\pi/2$	$= 4.712$	$270°$	-1	0	$\pm\infty$
$5\pi/3$	$= 5.236$	$300°$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$
$7\pi/4$	$= 5.498$	$315°$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
$11\pi/6$	$= 5.760$	$330°$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
2π	$= 6.283$	$360°$	0	1	0

3.7 Omforming av $a\cdot\cos(\omega t) + b\cdot\sin(\omega t)$

La a, b og ω være gitte tall $\neq 0$ med $\omega > 0$. Da er

$$a\cdot\cos(\omega t) + b\cdot\sin(\omega t) = C\cdot\cos\left(\omega(t - t_0)\right)$$

der $[C, \omega t_0]$ er polarkoordinatene til punktet (a, b).

Spesielt har vi

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{og} \qquad \tan(\omega\cdot t_0) = \frac{b}{a}$$

Vinkelen ωt_0 ligger i intervallet $[0, 2\pi\rangle$ og hører til samme kvadrant som punktet (a, b).

3.8 Derivert

Hvis vinkelen θ måles i radianer har vi

$$\sin(\theta)' = \cos(\theta)$$
$$\cos(\theta)' = -\sin(\theta)$$
$$\tan(\theta)' = \frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$$

3.9 Inverse trigonometriske funksjoner

Prinsipalvinkelen v_0 er den vinkelen du får ved å regne ut en invers trigonometrisk verdi på en typisk kalkulator. Avhengig av situasjonen kan flere vinkler enn v_0 være relevante.

$$\sin^{-1}(\theta) = \begin{cases} v_0 + 2k\pi \\ \pi - v_0 + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta \in [-1, 1], \\ v_0 \in [-\pi/2, \pi/2], \\ \pi - v_0 \in [\pi, 3\pi/2], \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos^{-1}(\theta) = \begin{cases} v_0 + 2k\pi \\ 2\pi - v_0 + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta \in [-1, 1], \\ v_0 \in [0, \pi], \\ 2\pi - v_0 \in [\pi, 2\pi], \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\tan^{-1}(\theta) = v_0 + k\pi \qquad \begin{cases} \theta \in \langle -\infty, \infty \rangle, \\ v_0 \in [-\pi/2, \pi/2], \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3.10 Sin, cos og tan av inverse trigonometriske funksjoner

$$\sin(\sin^{-1}(x)) = x$$
$$\sin(\cos^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$\sin(\tan^{-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$\cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$\cos(\cos^{-1}(x)) = x$$
$$\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$\tan(\sin^{-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$\tan(\cos^{-1}(x)) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$
$$\tan(\tan^{-1}(x)) = x$$

3.11 Inverse trigonometriske identiteter

$$\cos^{-1}(x) = \pi/2 - \sin^{-1}(x)$$
$$\frac{1}{\tan^{-1}(x)} = \pi/2 - \tan^{-1}(x)$$
$$\frac{1}{\sin^{-1}(x)} = \pi/2 - \frac{1}{\cos^{-1}(x)}$$

4 Logaritme- og eksponentialfunksjoner

4.1 Den naturlige logaritmen $\ln x$

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad x > 0$$

4.2 Det naturlige tallet e

Tallet e er det tallet i definisjonsmengden til den naturlige logaritmen som tilfredsstiller likningen

$$\ln(e) = 1$$

4.3 Egenskaper til logaritmer

For vilkårlige tall $a > 0$ og $x > 0$, så gjelder følgende regler:

$$\begin{aligned}
\ln(a \cdot x) &= \ln(a) + \ln(x) && \textbf{produktregelen} \\
\ln\left(\frac{a}{x}\right) &= \ln(a) - \ln(x) && \textbf{kvotientregelen} \\
\ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln(x) && \textbf{resiprokregelen} \\
\ln(x^r) &= r \cdot \ln(x) && \textbf{potensregelen}
\end{aligned}$$

4.4 Den naturlige eksponentialfunksjonen

For $x \in \mathbb{R}$, så er den inverse funksjonen til $\ln(x)$ lik e^x:

$$e^x = \ln^{-1}(x) = \exp(x)$$

Dette fører til at

$$\begin{aligned}
e^{\ln(x)} &= x && \text{for alle } x > 0 \\
\ln(e^x) &= x && \text{for alle } x
\end{aligned}$$

4.5 Generelle eksponentialfunksjoner

For alle tall $a > 0$ og x, så har vi

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

4.6 Generelle logaritmefunksjoner

For alle positive tall $b \neq 1$, så er

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \quad \text{den inverse funksjonen av} \quad b^x$$

Dette fører til at

$$\begin{aligned}
b^{\log_b(x)} &= x && \text{for alle } x > 0 \\
\log_b(b^x) &= x && \text{for alle } x
\end{aligned}$$

5 Kalkulus

5.1 Ulikheter

Hvis $a, b, c \in \mathbb{R}$ så har vi:

$$\begin{aligned}
a < b &\quad\Rightarrow\quad a + c < b + c \\
a < b &\quad\Rightarrow\quad a - c < b - c \\
a < b \text{ og } c > 0 &\quad\Rightarrow\quad ac < bc \\
a < b \text{ og } c < 0 &\quad\Rightarrow\quad ac > bc \\
a < b &\quad\Rightarrow\quad -a > -b \\
a > 0 &\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{a} > 0 \\
a, b > 0 \text{ eller } a, b < 0 &\quad\Rightarrow\quad a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

5.2 Absoluttverdi

Hvis $a, b, x \in \mathbb{R}$ så har vi:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2} &= |x| \\
|-a| &= |a| \\
|-a| &\neq -|a| \\
|ab| &= |a||b| \\
\left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|} \\
|a + b| &\leq |a| + |b| \qquad (\textbf{trekantulikheten})
\end{aligned}$$

Hvis $a > 0$ har vi:

$$\begin{aligned}
|x| = a &\quad\Leftrightarrow\quad x = \pm a \\
|x| < a &\quad\Leftrightarrow\quad -a < x < a \\
|x| > a &\quad\Leftrightarrow\quad x > a \text{ eller } x < -a \\
|x| \leq a &\quad\Leftrightarrow\quad -a \leq x \leq a \\
|x| \geq a &\quad\Leftrightarrow\quad x \geq a \text{ eller } x \leq -a
\end{aligned}$$

5.3 Intervaller

En delmengde av tallinja kalles et **intervall** om den inneholder minst to tall og inneholder alle reelle tall mellom to vilkårlige elementer i delmengden. Et linjesegment av tallinja er et **endelig intervall**. Et ubegrenset område av tallinja er et **uendelig intervall**. Et intervall er **lukket** om det inneholder begge **endepunktene**, **åpent** om det ikke inneholder noen endepunkter og **halvåpent** om det inneholder ett av endepunktene men ikke det andre. Punkter i intervallet som ikke er endepunkter kalles **indre punkter**. Vi har følgende typer intervaller:

Notasjon	Mengde	Type
$\langle a, b\rangle$	$\{x \mid a < x < b\}$	Åpent, endelig
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	Lukket, endelig
$[a, b\rangle$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	Halvåpent, endelig
$\langle a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	Halvåpent, endelig
$\langle a, \infty\rangle$	$\{x \mid x > a\}$	Åpent, uendelig
$[a, \infty\rangle$	$\{x \mid x \geq a\}$	Lukket, uendelig
$\langle -\infty, b\rangle$	$\{x \mid x < b\}$	Åpent, uendelig
$\langle -\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	Lukket, uendelig
$\langle -\infty, \infty\rangle$	$\mathbb{R}$	Åpent, lukket, uendelig

5.4 Funksjoner

En **funksjon** fra en mengde D til en mengde Y er en regel som tilordner ett (unikt) element $f(x) \in Y$ til hvert element $x \in D$. Mengden D med alle mulige inputverdier kalles **definisjonsmengden** til funksjonen. Mengden av alle verdiene til $f(x)$ når x varierer gjennom hele D kalles **verdimengden** til funksjonen.

5.5 Polynomer

En funksjon $p(x)$ er et **polynom** i x hvis

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. a_n kalles koeffisientene til polynomet. Alle polynomer har definisjonsmengde $\langle -\infty, \infty \rangle$ og n kalles **graden** av polynomet.

5.6 Rasjonale funksjoner

En **rasjonal funksjon** er et forhold mellom to polynomer:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

der p og q er polynomer. Definisjonsmengden til en rasjonal funksjon er mengden av alle $x \in \mathbb{R}$ der $q(x) \neq 0$.

5.7 Proporsjonalitet

To variabler x og y er **proporsjonale** til hverandre hvis den ene alltid er en konstant multippel av den andre, dvs:

$$y = kx$$

for en eller annen konstant $k \neq 0$.

5.8 Sammensatte funksjoner

Hvis f og g er funksjoner, så er den **sammensatte funksjonen**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Definisjonsmengden til $f \circ g$ består av tallene x i definisjonsmengden til g der $g(x)$ ligger i definisjonsmengden til f.

5.9 Flytting/modifisering av grafer

En graf til en funksjon $f(x)$ kan flyttes, strekkes og speiles ved å legge til eller gange med en konstant k på forskjellige måter:

Hvis $k > 0$ så har vi:

$f(x) + k$	Flytter grafen opp lengden k
$f(x) - k$	Flytter grafen ned lengden k
$f(x + k)$	Flytter grafen lengden k mot venstre
$f(x - k)$	Flytter grafen lengden k mot høyre

Hvis $k > 1$ så har vi:

$kf(x)$	Strekker grafen vertikalt med faktoren k
$\frac{1}{k}f(x)$	Trykker grafen vertikalt med faktoren k
$f(kx)$	Trykker grafen horisontalt med faktoren k
$f(x/k)$	Strekker grafen horisontalt med faktoren k

Hvis $k = -1$ så har vi:

$kf(x) = -f(x)$	Speiler grafen gjennom x-aksen
$f(kx) = f(-x)$	Speiler grafen gjennom y-aksen

5.10 Jevne og odde funksjoner

En funksjon $y = f(x)$ er en

jevn funksjon av x hvis $f(-x) = f(x)$,
odde funksjon av x hvis $f(-x) = -f(x)$,

for hver x i funksjonens definisjonsmengde. Jevne funksjoner er symmetriske om y-aksen. Odde funksjoner er symmetriske om origo.

5.11 Grenseverdier

Hvis $L, M, c, k \in \mathbb{R}$ og

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{og} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M, \text{ så}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) &= L + M \\
\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) &= L - M \\
\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) &= L \cdot M \\
\lim_{x \to c}(k \cdot f(x)) &= k \cdot L \\
\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{L}{M}, \quad M \neq 0
\end{aligned}$$

Hvis $r, s \in \mathbb{N}$, ikke har noen felles faktor og $s \neq 0$, så

$$\lim_{x \to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

gitt at $L^{r/s} \in \mathbb{R}$. Hvis s er et partall, antar vi $L > 0$.

Hvis $\lim_{x \to c} \ln f(x) = L$, da er

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} e^{\ln f(x)} = e^L$$

Merk at disse reglene også er gyldige når $c = \pm\infty$.

5.12 Grenseverdien til polynomer

Hvis $p(x)$ er et polynom, så er

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

5.13 Grenseverdien til rasjonale funksjoner

Hvis $p(x)$ og $q(x)$ er polynomer og $q(c) \neq 0$, så er

$$\lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$$

5.14 Sandwichteoremet

Anta at $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for alle x i et åpent intervall som inneholder c, utenom muligens ved $x = c$. Anta i tillegg at

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L.$$

Da vil også

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

5.15 Venstre og høyre grenseverdier

En funksjon $f(x)$ har en grenseverdi når x går mot c hvis og bare hvis den har venstre og høyre grenseverdier der og disse grenseverdiene er like:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = L \text{ og } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

5.16 Horisontal asymptote

En linje $y = b$ er en **horisontal asymptote** av grafen til en funksjon $y = f(x)$ hvis

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \text{og/eller} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

5.17 Skråasymptote

Hvis graden til telleren i en rasjonal funksjon $f(x)$ er én høyere enn graden til nevneren så har grafen til funksjonen en **skråasymptote**. Ved å dele telleren på nevneren ved polynomdivisjon får vi uttrykt den rasjonale funksjonen som en lineær funksjon av x pluss et restledd med x i nevneren. Den lineære delen er funksjonen for skråasymptoten.

5.18 Vertikal asymptote

En linje $x = a$ er en **vertikal asymptote** av grafen til en funksjon $y = f(x)$ hvis enten

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

5.19 Noen grenseverdier

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ i radianer})$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (\text{for alle } x)$$

5.20 Kontinuitet

En funksjon $f(x)$ er **kontinuerlig** ved $x = c$ hvis og bare hvis følgende tre krav er oppfylt:

1. $f(c)$ finnes (c er i definisjonsmengden til f)
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ finnes (f har en grense når $x \to c$)
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (grenseverdien er lik $f(c)$)

5.21 Kontinuerlig funksjon

En funksjon er kontinuerlig på et intervall hvis og bare hvis den er kontinuerlig på alle punktene i intervallet. En **kontinuerlig funksjon** er en funksjon som er kontinuerlig på alle punktene i funksjonens definisjonsmengde. En funksjon trenger ikke være kontinuerlig på alle intervaller. F.eks. $y = 1/x$ er ikke kontinuerlig i intervallet $[-1, 1]$, men er kontinuerlig i definisjonsmengden $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$.

5.22 Egenskaper til kontinuerlige funksjoner

Hvis funksjonene f og g er kontinuerlige ved $x = c$, da er følgende kombinasjoner også kontinuerlige ved $x = c$:

Summer	$f + g$
Differanser	$f - g$
Produkter	$f \cdot g$
Konstante multipler	$k \cdot f$, for alle tall k
Kvotienter	f/g, gitt at $g(c) \neq 0$
Potenser	$f^{r/s}$, gitt at $f^{r/s}$ er definert på et åpent intervall som inneholder c og $r, s \in \mathbb{N}$
Sammensatte funksjoner	$f \circ g = f(g(x))$

5.23 Skjæringssetningen

En funksjon $y = f(x)$ som er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$ antar alle verdier mellom $f(a)$ og $f(b)$. Dvs at hvis y_0 er en hvilken som helst verdi mellom $f(a)$ og $f(b)$, så er $y_0 = f(c)$ for en eller annen $c \in [a, b]$.

5.24 Stigningstallet til en kurve på et punkt

Stigningstallet til en kurve $y = f(x)$ på punktet $P(x_0, f(x_0))$ er tallet

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (\text{gitt at denne finnes})$$

Tangenten til kurven ved P er linjen gjennom P med dette stigningstallet.

5.25 Derivasjon

Den **deriverte** til funksjonen $f(x)$ med hensyn på variabelen x er funksjonen f' som er definert slik:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

gitt at denne grenseverdien finnes. Det er mange måter å skrive den deriverte på. Noen alternativer er:

$$f'(x) = \dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = f_x = \mathrm{D}f = \mathrm{D}_x f = f^{(1)}$$

5.26 Deriverbarhet impliserer kontinuitet

Hvis f er deriverbar ved $x = c$ så betyr det at f også er kontinuerlig ved $x = c$ (men ikke nødvendigvis motsatt).

5.27 Darboux' teorem

Hvis a og b er to vilkårlige punkter i et intervall der f er deriverbar, så vil f' anta alle verdier mellom $f'(a)$ og $f'(b)$.

5.28 Ekstremverdier

La f være en funksjon med definisjonsmengde D. Da har f en **global maksimumsverdi** på D ved et punkt c hvis

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{for alle } x \text{ i } D$$

og en **global minimumsverdi** på D ved c hvis

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{for alle } x \text{ i } D.$$

Hvis f er kontinuerlig og definisjonsmengden til f er det lukkede intervallet $[a, b]$, da vil f ha både en **absolutt maksimumsverdi** M og en **absolutt minimumsverdi** m i $[a, b]$. Dvs, det finnes to tall x_1 og x_2 i $[a, b]$ der $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ og $m \leq f(x) \leq M$ for alle x-verdier i $[a, b]$.

5.29 Lokale maks og min

En funksjon f har en **lokal maksimumsverdi** ved et indre punkt c i definisjonsmengden hvis $f(x) \leq f(c)$ for alle x i et åpent intervall som inneholder c.

En funksjon f har en **lokal minimumsverdi** ved et indre punkt c i definisjonsmengden hvis $f(x) \geq f(c)$ for alle x i et åpent intervall som inneholder c.

Globale ekstremverdier er også lokale ekstremverdier, men ikke nødvendigvis motsatt.

5.30 Førstederivert-testen for lokale ekstremverdier

Hvis f har en lokal maksimums- eller minimumsverdi ved et indre punkt c i definisjonsmengden, og f' er definert ved c, så er $f'(c) = 0$.

5.31 Kritisk punkt

Et indre punkt i definisjonsmengden til en funksjon f der f' er null eller udefinert kalles et **kritisk punkt** på f.

Globale ekstrempunkt på et endelig lukket intervall til en kontinuerlig funksjon f er den største og den minste verdien til f av alle kritiske punkter og endepunkter.

5.32 Rolles teorem

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig på alle punkter i det lukkede intervallet $[a, b]$ og deriverbar på alle punkter i det åpne intervallet $\langle a, b \rangle$. Hvis

$$f(a) = f(b),$$

da finnes det minst ett tall c i $\langle a, b \rangle$ hvor

$$f'(c) = 0$$

5.33 Middelverditeoremet

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$ og deriverbar på alle punkter i det åpne intervallet $\langle a, b \rangle$. Da finnes det minst et punkt c i $\langle a, b \rangle$ hvor

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

5.34 Funksjoner med null som derivert er konstante

Hvis $f'(x) = 0$ ved alle punkter x i et åpent intervall $\langle a, b \rangle$, da er $f(x) = C$ for alle $x \in \langle a, b \rangle$, der C er en konstant.

5.35 To funksjoner med samme derivert avviker med en konstant

Hvis $f'(x) = g'(x)$ for alle punkter x i et åpent intervall $\langle a, b \rangle$, da finnes det en konstant C slik at $f(x) = g(x) + C$ for alle $x \in \langle a, b \rangle$. Dvs, $f - g$ er en konstant på $\langle a, b \rangle$.

5.36 Vekstrater når $x \to \infty$

La $f(x)$ og $g(x)$ være positive for tilstrekkelig store x. Hvis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

eller, tilsvarende, om

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

så sier vi at f **vokser raskere enn** g, evt at g **vokser seinere enn** f. Hvis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad \text{(et endelig tall)}$$

så har f og g **samme vekstrate** når $x \to \infty$.

5.37 Økende, avtakende og monotone funksjoner

La f være en funksjon definert på et intervall I og la x_1 og x_2 være to vilkårlige verdier i I. Da har vi:

Hvis $f(x_1) < f(x_2)$ når $x_1 < x_2$ så er f **økende** på I.

Hvis $f(x_1) > f(x_2)$ når $x_1 < x_2$ så er f **avtakende** på I.

En funksjon som enten er økende eller avtakende på I kalles **monoton** på I.

5.38 Førstederivert-testen for monotone funksjoner

Anta at f er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på $\langle a, b \rangle$. Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in \langle a, b \rangle$, da er f økende på $[a, b]$. Hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in \langle a, b \rangle$, da er f avtakende på $[a, b]$.

5.39 Førstederivert-testen for lokale ekstremverdier

Anta at c er et kritisk punkt på en kontinuerlig funksjon f, og at f er deriverbar på alle punkter i et intervall som inneholder c, men ikke nødvendigvis ved c. Hvis det viser seg at, når man beveger seg forbi c fra venstre mot høyre på tallinjen, og

1. hvis f' går fra negativ til positiv ved c, da har f lokalt minimum ved c;

2. hvis f' går fra positiv til negativ ved c, da har f lokalt maksimum ved c;

3. hvis f' ikke forandrer fortegn ved c, da har ikke f lokal ekstremverdi ved c.

5.40 Konkav opp, konkav ned

Grafen til en deriverbar funksjon $f(x)$ er på et åpent intervall I **konkav opp** hvis f' er økende på I og **konkav ned** hvis f' er avtakende på I.

5.41 Andrederivert-testen for konkavitet

La $f(x)$ være dobbelt deriverbar på et intervall I
Hvis $f'' > 0$ på I, da er grafen til f over I konkav opp.
Hvis $f'' < 0$ på I, da er grafen til f over I konkav ned.

5.42 Vendepunkt

Et punkt der grafen til en funksjon kan ha en tangent og der konkaviteten endres, kalles et **vendepunkt**.

5.43 Andrederivert-testen for lokale ekstremverdier

Anta at f'' er kontinuerlig på et åpent intervall som inneholder $x = c$.

Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, da har f lokalt maksimum ved $x = c$.

Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, da har f lokalt minimum ved $x = c$.

Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) = 0$, da feiler testen. Funksjonen f kan da enten ha lokalt maks, lokalt min, eller ingen av delene.

5.44 L'Hôpitals regel

Anta at $f(a) = g(a) = 0$, og at f og g er deriverbare på et åpent intervall I som inneholder a, og at $g'(x) \neq 0$ på I når $x \neq a$. Da har vi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

hvis grenseverdien til høyre finnes. Det samme gjelder om $f(x) \to \pm\infty$ og $g(x) \to \pm\infty$ når $x \to a$. Vi kan også ha $a = \pm\infty$ eller $x \to a^+$ eller $x \to a^-$.

5.45 Antideriverte

En funksjon F kalles en **antiderivert** av f på et intervall I hvis $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in I$. Hvis F er en antiderivert av f på et intervall I, da er den mest generelle antideriverte av f på I

$$F(x) + C$$

hvor C er en vilkårlig konstant.

5.46 Ubestemt integral

Mengden av alle antideriverte av f er det **ubestemte integralet** av f med hensyn på x, og blir skrevet slik:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Symbolet $\int$ er et **integraltegn**. Funksjonen f er **integranden** til integralet, og x er **integrasjonsvariabelen**.

5.47 Bestemt integral

Hvis en funksjon $f(x)$ er ikkenegativ og integrerbar over et lukket intervall $[a, b]$, da er arealet mellom kurven $f(x)$ og x-aksen over $[a, b]$ integralet av f fra a til b,

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

5.48 Regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

5.49 Gjennomsnittsverdien til en funksjon

Hvis f er integrerbar på $[a, b]$, da er **gjennomsnittsverdien** til f på $[a, b]$ lik

$$gj(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

5.50 Middelverditeoremet for bestemte integraler

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$, da finnes det et punkt c i $[a, b]$ hvor

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

5.51 Kalkulusens fundamentalteorem

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$, da er $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på $\langle a, b\rangle$, og dens deriverte er $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

Hvis f er kontinuerlig på alle punkter i $[a, b]$, og F er en vilkårlig antiderivert av f på $[a, b]$, da har vi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

5.52 Delvis integrasjon

Hvis f er en funksjon av x så kan vi la $f^{(1)}$ bety den 1. deriverte av f, $f^{(2)}$ den 2. deriverte av f, osv. Vi kan også la $f^{(0)}$ bety f og $f^{(-1)}$ bety $\int f\,\mathrm{d}x$, $f^{(-2)}$ bety $\int(\int f\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$, osv. Så den n'te deriverte av f er $f^{(n)}$ og den n'te antideriverte av f er $f^{(-n)}$ der n er et positivt heltall. Vi har dermed $\left(f^{(1)}\right)^{(-1)} = f^{(0)} + C = f + C$ og $\left(f^{(-1)}\right)^{(1)} = f^{(0)} = f$.

Produktregelen for derivasjon:

$$(u \cdot v)^{(1)} = u^{(1)} \cdot v + u \cdot v^{(1)}$$

Hvis vi antideriverer begge sider får vi

$$\begin{aligned}\left((u\cdot v)^{(1)}\right)^{(-1)} &= \left(u^{(1)}\cdot v + u\cdot v^{(1)}\right)^{(-1)}\\ (u\cdot v)^{(0)} &= \left(u^{(1)}\cdot v\right)^{(-1)} + \left(u\cdot v^{(1)}\right)^{(-1)}\\ \left(u\cdot v^{(1)}\right)^{(-1)} &= u\cdot v - \left(u^{(1)}\cdot v\right)^{(-1)}\end{aligned}$$

Hvis vi foretar substitusjonene $u = f$ og $v^{(1)} = g$, får vi $u^{(1)} = f^{(1)}$ og $v = g^{(-1)}$ og:

$$(f\cdot g)^{(-1)} = f\cdot g^{(-1)} - \left(f^{(1)}\cdot g^{(-1)}\right)^{(-1)}$$

Dvs:

$$\int f\cdot g\,\mathrm{d}x = f\cdot g^{(-1)} - \int f^{(1)}\cdot g^{(-1)}\,\mathrm{d}x$$

Dette kan vi kalle produktregelen for integrasjon, men kalles vanligvis for delvis integrasjon. Ved å bruke regelen en gang til, på uttrykket $\int f^{(1)}\cdot g^{(-1)}\,\mathrm{d}x$ ser vi

$$\int f^{(1)}\cdot g^{(-1)}\,\mathrm{d}x = f^{(1)}\cdot g^{(-2)} - \int f^{(2)}\cdot g^{(-2)}\,\mathrm{d}x$$

Det betyr at

$$\int f\cdot g\,\mathrm{d}x = f\cdot g^{(-1)} - f^{(1)}\cdot g^{(-2)} + \int f^{(2)}\cdot g^{(-2)}\,\mathrm{d}x$$

Dette kan gjøres flere ganger, så vi får dette mønsteret:

$$\begin{aligned}\int f\cdot g\,\mathrm{d}x = f\cdot g^{(-1)}&\\ &- f^{(1)}\cdot g^{(-2)}\\ &+ f^{(2)}\cdot g^{(-3)}\\ &- f^{(3)}\cdot g^{(-4)}\\ &+ f^{(4)}\cdot g^{(-5)}\\ &\ \ \vdots\\ &+ (-1)^{n-1}\cdot f^{(n-1)}\cdot g^{(-n)}\\ &+ (-1)^{n}\cdot\int f^{(n)}\cdot g^{(-n)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Hvis $f^{(n)} = 0$ (f.eks. polynomer) så blir

$$\begin{aligned}\int f\cdot g\,\mathrm{d}x = f\cdot g^{(-1)}&\\ &- f^{(1)}\cdot g^{(-2)}\\ &+ f^{(2)}\cdot g^{(-3)}\\ &- f^{(3)}\cdot g^{(-4)}\\ &+ f^{(4)}\cdot g^{(-5)}\\ &\ \ \vdots\\ &+ (-1)^{n-1}\cdot f^{(n-1)}\cdot g^{(-n)} + C\end{aligned}$$

Se også `trondal.com/delvis`

5.53 Substitusjonsregelen for ubestemte integral

Hvis $u = g(x)$ er deriverbar, og verdimengden til g er et intervall som f er kontinuerlig på, så har vi

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

Med notasjonen fra kapittel 5.52 får vi

$$\int f(g)\cdot g^{(1)}\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = f^{(-1)}(g) + C$$

5.54 Substitusjonsregelen for bestemte integral

Hvis $g'(x)$ er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ og f er kontinuerlig på verdimengen til $g(x)$, da har vi

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Med notasjonen fra kapittel 5.52 får vi

$$\int_a^b f(g)\cdot g^{(1)}\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \left[f^{(-1)}(g)\right]_{g(a)}^{g(b)}$$

5.55 Spesialtilfeller når f er jevn eller odde

Hvis f er kontinuerlig på intervallet $[-a, a]$, da:

$$\text{Hvis } f \text{ er jevn, da er } \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{Hvis } f \text{ er odde, da er } \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

5.56 Arealet mellom kurver

Hvis f og g er kontinuerlige og $f(x) \geq g(x)$ i $[a, b]$, da er arealet av området mellom kurvene $y = f(x)$ og $y = g(x)$ fra a til b integralet av $(f - g)$ fra a til b:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

5.57 Volum

Volumet av et legeme med et kjent integrerbart tversnittareal $A(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ er integralet av A fra a til b:

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

5.58 Volum med skivemetoden

Rotasjon av **y**(x) om akse || **x**-akse:

$$V = \pi\int_a^b \left(R(x)^2 - r(x)^2\right)\,\mathrm{d}x$$

Rotasjon av **x**(y) om akse || **y**-akse:

$$V = \pi\int_a^b \left(R(y)^2 - r(y)^2\right)\,\mathrm{d}y$$

5.59 Volum med sylinderskallmetoden

Rotasjon av $\mathbf{y}(\mathrm{x})$ om akse || $\mathbf{y}$-akse:

$$V = 2\pi \int_a^b \begin{pmatrix} \text{skall} \\ \text{radius} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{skall} \\ \text{høyde} \end{pmatrix} \mathrm{d}x$$

Rotasjon av $\mathbf{x}(\mathrm{y})$ om akse || $\mathbf{x}$-akse:

$$V = 2\pi \int_a^b \begin{pmatrix} \text{skall} \\ \text{radius} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{skall} \\ \text{høyde} \end{pmatrix} \mathrm{d}y$$

5.60 Kurvelengde

Hvis g er kontinuerlig og deriverbar på $[c, d]$, da er lengden av kurven (grafen) $x = g(y)$ fra $y = c$ til $y = d$ lik

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\, \mathrm{d}y = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, \mathrm{d}y$$

5.61 Enentydig funksjon

En funksjon $f(x)$ er **enentydig** (eller **injektiv**) på D_f hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ når $x_1 \neq x_2$ i D_f.

5.62 Horisontallinjetesten for enentydige funksjoner

En funksjon $y = f(x)$ er enentydig hvis og bare hvis grafen skjærer enhver horisontal linje høyest ett sted.

5.63 Invers funksjon

Anta at f er en enentydig funksjon på en definisjonsmengde D med verdimengde R. Den **inverse funksjonen** f^{-1} er definert ved

$$f^{-1}(a) = b \quad \text{hvis} \quad f(b) = a$$

Definisjonsmengden til f^{-1} er R og verdimengden til f^{-1} er D.

5.64 Resiprok

Om et tall $a \in \mathbb{R}$ ikke er lik null, så kalles $\frac{1}{a}$ for **resiproken** til a.

5.65 Den deriverte av en invers funksjon

Hvis f har et intervall I som definisjonsmengde og $f'(x)$ finnes og aldri er null på I, da er f^{-1} deriverbar på alle punkter i dens definisjonsmengde. Verdien til $(f^{-1})'$ ved et punkt b i definisjonsmengden til f^{-1}, er resiproken til verdien til f' ved punktet $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

eller

$$\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

5.66 Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

5.67 Trapesmetoden

Et bestemt integral av f fra a til b kan approksimeres ved å stykke opp intervallet i n like store lengder, og summere arealet av trapesene fra x-aksen til f. Bredden på hvert trapes blir $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Summen av trapesarealene blir da

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\Delta x) + f(b)\right)$$

5.68 Simpsons metode

$$S = \frac{\Delta x}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Der y'ene er verdier av f ved partisjonspunktene

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b.$$

Tallet n er et partall, og $\Delta x = (b - a)/n$.

5.69 Bevis for rekkeformel

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = f(n) \qquad n \in 1, 2, 3, \ldots$$
$$\Updownarrow$$
$$a_1 - f(1) = 0 \qquad \text{og} \qquad f(n) + a_{n+1} - f(n+1) = 0$$

5.70 Bevis for produktformel

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = f(n) \qquad n \in 1, 2, 3, \ldots$$
$$\Updownarrow$$
$$a_1 - f(1) = 0 \qquad \text{og} \qquad f(n) \cdot a_{n+1} - f(n+1) = 0$$

6 Parameterfremstilling

6.1 Linje

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cdot(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t\cdot(y_1 - y_0) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

6.2 Sirkel

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos(t) \\ y = r\cdot\sin(t) \end{cases} \quad (0 < t < 2\pi)$$

6.3 Ellipse

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos(t) \\ y = b\cdot\sin(t) \end{cases} \quad (0 < t < 2\pi)$$

6.4 Tangenter til glatte kurver

Horisontale tangenter når $\quad y'(t) = 0$

Vertikale tangenter når $\quad x'(t) = 0$

Stigningstallet til en kurve i et punkt: $\frac{y'(t)}{x'(t)}\big|_{t=t_0}$

6.5 Tangent- og normallinjer

Tangentlinje til parameterisert kurve gjennom punktet:

$$\begin{cases} x = f(t_0) + f'(t_0)\cdot(t - t_0) \\ y = g(t_0) + g'(t_0)\cdot(t - t_0) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

Normallinje til parameterisert kurve:

$$\begin{cases} x = f(t_0) + g'(t_0)\cdot(t - t_0) \\ y = g(t_0) - f'(t_0)\cdot(t - t_0) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

6.6 Buelengdedifferensialen

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

6.7 Lengden til en glatt kurve

$$s = \int_{t=a}^{t=b} \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$$

6.8 Overflateareal til omdreiningslegemer

Overflatearealet ved omdreining om x-aksen:

$$S = 2\pi\int_{t=a}^{t=b} |y|\,\mathrm{d}s = 2\pi\int_a^b |g(t)|\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Overflatearealet ved omdreining om y-aksen:

$$S = 2\pi\int_{t=a}^{t=b} |x|\,\mathrm{d}s = 2\pi\int_a^b |f(t)|\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

6.9 Areal innenfor en simpel, lukket kurve

$$A = \left|\int_a^b g(t)\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \quad \text{hvis } g \text{ er kontinuerlig og } f \text{ er deriverbar}$$

$$A = \left|\int_a^b f(t)\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t\right| \quad \text{hvis } f \text{ er kontinuerlig og } g \text{ er deriverbar}$$

7 Polare koordinater og grafer

7.1 Definisjon av polare koordinater

De **polare koordinatene** til et sted i planet defineres med to tall; det første tallet r er avstanden fra origo, og det andre tallet θ er vinkelen fra strålen som går fra origo mot positiv x-akse til strålen som går fra origo mot punktet. Polare koordinater skrives slik:

$$[r, \theta]$$

7.2 Negativ radius

Hvis r er et negativt tall, betyr det at strålen som går mot punktet går motsatt vei av vinkelen θ. Dvs at

$$[r, \theta] = [-r, \theta + (2k+1)\pi]$$

7.3 Sammenheng mellom kartesiske og polare koordinater

$$\begin{aligned} x &= r\cdot\cos(\theta) \\ y &= r\cdot\sin(\theta) \\ x^2 + y^2 &= r^2 \\ \frac{y}{x} &= \tan(\theta) \end{aligned}$$

7.4 Rotasjon av polar graf

Den polare grafen $r = f(\theta - \theta_0)$ er den polare grafen $r = f(\theta)$ rotert vinkelen θ_0 om origo.

7.5 Retningen til en polar graf i origo

Den polare grafen $r = f(\theta)$ nærmer seg origo fra retningen θ for de verdiene av θ som gjør at $f(\theta) = 0$.

7.6 Skjæringspunkt til polare grafer

$r = f(\theta)$ og $r = g(\theta)$ har mulige skjæringspunkt i 3 tilfeller:

1. I origo hvis både $f(\theta) = 0$ og $g(\theta) = 0$ har minst en løsning hver.
2. Alle punkter $[g(\theta_i), \theta_i]$ der θ_i er løsningene til likningen $f(\theta) = g(\theta)$.
3. Alle punkter $[g(\theta_i), \theta_i]$ der θ_i er løsningene til likningen $f(\theta + (2k+1)\pi) = -g(\theta)$.

7.7 Areal til polare grafer

Området begrenset av grafen til $r = f(\theta)$ og strålene $\theta = \alpha$ og $\theta = \beta$ der $\alpha < \beta$ har arealet

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta$$

7.8 Lengden til polare grafer

Grafen til $r = f(\theta)$ fra $\theta = \alpha$ til $\theta = \beta$ der $\alpha < \beta$ har lengden

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\,d\theta$$

8 Vektorer

8.1 Egenskaper til vektorer

Basis for **kartesisk rom**: $\vec{\imath} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \ \vec{\jmath} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \ \vec{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

Vektor i rommet: $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$

Vektoren fra A til B:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{\imath} + (b_2 - a_2)\vec{\jmath} + (b_3 - a_3)\vec{k}$$

Tall ganger vektor: $t \cdot \vec{v} = tv_1\vec{\imath} + tv_2\vec{\jmath} + tv_3\vec{k}$

Addisjon/Subtraksjon:

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1)\vec{\imath} + (u_2 \pm v_2)\vec{\jmath} + (u_1 \pm v_1)\vec{k}$$

Vektor i andre: $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Prikkprodukt: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$

Vinkel mellom u og v: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

Prikkprodukt ift **vinkelrett**: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{u} \perp \vec{v}$

Enhetsvektor: $\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$

Lengden til en vektor: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Skalarprojeksjonen av u langs v: $s = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| \cdot \cos\theta$

Vektorprojeksjonen av u langs v: $\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \hat{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$

8.2 Kryssprodukt

Kryssprodukt/vektorprodukt er en regneoperasjon definert for tredimensjonale vektorer:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{v}$ vil nå stå vinkelrett både på $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$. Det er også slik at

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

En teknikk for å regne ut kryssproduktet mellom to vektorer:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 \\ 3 \times 6 \\ 1 \times 4 \\ 2 \quad 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 6 - 5\cdot 3 \\ 3\cdot 4 - 6\cdot 1 \\ 1\cdot 5 - 4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-15 \\ 12-6 \\ 5-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Egenskaper:

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} &= 0 \\
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} &= 0 \\
|\vec{u} \times \vec{v}| &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\theta) \\
\vec{u} \times \vec{u} &= \vec{0} \\
\vec{u} \times \vec{v} &= \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \,||\, \vec{v} \\
\vec{u} \times \vec{v} &= -\vec{v} \times \vec{u} \quad \text{(antikommutativ)} \\
(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \quad \text{(distributiv} \\
\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} \quad \text{over addisjon)} \\
(t \cdot \vec{u}) \times \vec{v} &= \vec{u} \times (t \cdot \vec{v}) = t \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \\
\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &\neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \quad \text{(ikke assosiativ)}
\end{aligned}$$

8.3 Anvendelser av kryssprodukt

Vinkel mellom u og v: $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

Areal av trekant: $A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

Areal av parallellogram: $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Det skalare trippelproduktet: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Koplanaritet:

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ og } \vec{w} \text{ er koplanære} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$$

Volumet til et parallellepiped: $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

Volumet til et tetraeder: $V = \frac{1}{6}|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

9 Analytisk romgeometri

9.1 Definisjoner for plan i rommet

Punkt planet går gjennom:	$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
Retningsvektor til punktet:	$\vec{r}_0 = x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath} + z_0\vec{k}$
Vilkårlig punkt i planet:	$P = (x, y, z)$
Retningsvektor til punktet:	$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
Normalvektor til planet:	$\vec{n} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}$

9.2 Ligning for plan på vektorform

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

9.3 Ligninger for plan på standardform

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

eller

$$Ax + By + Cz = D \quad \text{der} \quad D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

9.4 Skjæring med koordinataksene

Hvis $A \neq 0$, $B \neq 0$ og $C \neq 0$ så skjærer planet i

$$\left(\frac{D}{A}, 0, 0\right), \quad \left(0, \frac{D}{B}, 0\right) \text{ og } \left(0, 0, \frac{D}{C}\right)$$

Et plan som går gjennom $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ og $(0, 0, c)$ kan skrives på formen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

9.5 Planpensel

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z - D_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z - D_2) = 0$$

9.6 Definisjoner for linje i rommet

Punkt linja går gjennom:	$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
Retningsvektor til punktet:	$\vec{r}_0 = x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath} + z_0\vec{k}$
Vilkårlig punkt på linja:	$P = (x, y, z)$
Retningsvektor til punktet:	$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
Retningsvektor til linja:	$\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$

9.7 Linje på vektor-parameterform

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}$$

9.8 Linje på skalar-parameterform

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

9.9 Linje på standardform

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Men hvis f.eks. $c = 0$ så: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, z = z_0$

9.10 Avstand mellom to punkter

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

9.11 Avstand mellom punkt og plan

Avstanden mellom punktet (x_0, y_0, z_0) og planet $Ax + By + Cz = D$ er

$$s = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

9.12 Avstand mellom punkt og linje

Avstanden mellom punktet med posisjonsvektor $\vec{r}_0$ og en linje gjennom punktet med posisjonsvektor $\vec{r}_1$ og retningsvektor $\vec{v}$ er

$$s = \frac{|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

9.13 Avstand mellom to linjer

Avstanden mellom en linje gjennom punktet med posisjonsvektor $\vec{r}_1$ som har retningsvektor $\vec{v}_1$, og en linje gjennom punktet med posisjonsvektor $\vec{r}_2$ som har retningsvektor $\vec{v}_2$ er

$$s = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

10 Sylindriske og sfæriske koordinater

10.1 atan2

$\operatorname{atan2}(y, x)$ gir vinkelen til et punkt i xy-planet:

$$\operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{når } x > 0 \\ \tan^{-1}(y/x) + \pi & \text{når } x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}(y/x) - \pi & \text{når } x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & \text{når } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{når } x = 0, y < 0 \\ \text{udefinert} & \text{når } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

10.2 Notasjon for kartesiske, sylindriske og sfæriske punkter

Kartesisk punkt: (x, y, z)

Sylindrisk punkt: $[r, \theta, z]$

Sfærisk punkt: $[R, \phi, \theta]$

Merk at skrivemåten for sfæriske punkter dessverre ikke er veldig standardisert. I denne formelsamlingen så betyr θ den vanlige polare vinkelen i xy-planet, og ϕ betyr vinkelen som ligger mellom positiv z-akse og strålen som går fra origo og ut til punktet.

10.3 Bytte av koordinatsystem

Kartesisk til sylindrisk: $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(y, x) \\ z = z \end{cases}$

Sylindrisk til kartesisk: $\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$

Kartesisk til sfærisk: $\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi = \cos^{-1}(z/R) \\ \theta = \operatorname{atan2}(y, x) \end{cases}$

Sfærisk til kartesisk: $\begin{cases} x = R \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) \\ y = R \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ z = R \cdot \cos(\phi) \end{cases}$

Sylindrisk til sfærisk: $\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \phi = \cos^{-1}(z/R) \\ \theta = \theta \end{cases}$

Sfærisk til sylindrisk: $\begin{cases} r = R \cdot \sin(\phi) \\ \theta = \theta \\ z = R \cdot \cos(\phi) \end{cases}$

11 Lineær algebra

11.1 Lineær likninger

En **lineær likning** med variabler $x_1, \ldots, x_n$ kan skrives

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

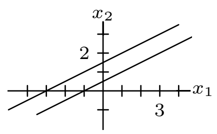
der b og **koeffisientene** $a_1, \ldots, a_n$ er reelle eller komplekse tall. Et **system med lineære likninger** (eller et **lineært system**) er en samling med en eller flere lineære likninger. F.eks.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 &= 8 \\ x_1 - 4x_3 &= -7 \end{aligned}$$

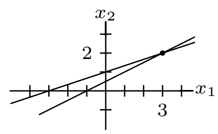
11.2 Løsninger

En løsning av systemet er en liste $(s_1, \ldots s_n)$ med tall som gjør at hver likning stemmer når man bytter ut $x_1, \ldots, x_n$ med $s_1, \ldots, s_n$. Samlingen av alle mulige løsninger kalles **løsningsmengden**. To lineære systemer kalles **ekvivalente** hvis de har samme løsningsmengde. Å finne løsningsmengden til et system med to lineære likninger med to variable med reelle koeffisienter er ekvivalent med å finne ut hvor to linjer krysser hverandre. F.eks:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

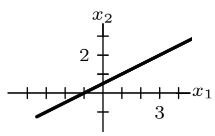


Ingen løsning



Nøyaktig én løsning

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$



Uendelig mange løsninger

Et lineært system har enten ingen løsning, eller nøyaktig én løsning, eller uendelig mange løsninger.

Et lineært system er **konsistent** hvis det har minst en løsning og er **inkonsistent** hvis det ikke har noen løsning.

11.3 Matriserepresentasjon

Et lineært system kan representeres med en matrise. F.eks. gitt det lineære systemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \end{aligned}$$

så kan man representere koeffisientene i systemet med følgende **koeffisientmatrise**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Hele det lineære systemet kan representeres med følgende **augmenterte matrise**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

Størrelsen til en matrise sier hvor mange rader og kolonner den har. Den augmenterte matrisa ovenfor har 3 rader og 4 kolonner. En **$m \times n$ matrise** ("m ganger n matrise") er en matrise med m horisontale rader og n vertikale kolonner. m og n trenger ikke å være forskjellige tall. Hvis to matriser er ekvivalente skrives tegnet $\sim$ mellom dem.

11.4 Radoperasjoner

Tre grunnleggende **radoperasjoner** kan benyttes på lineære systemer uten at det påvirker løsningsmengden:

Erstatning: Erstatte en rad med summen av seg selv og en multippel av en annen rad.

Ombytting: Bytte om to rader.

Skalering: Gange alle tall i en rad med et tall ulik 0.

Eks.1: Erstatter rad 2 med (rad 2) + (4 ganger rad 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4+4\cdot 1 & 5+4\cdot(-2) & 9+4\cdot 1 & -9+4\cdot 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

Eks.2: Bytter rad 2 med rad 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Eks.3: Ganger alle tall i rad 2 med $\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot\frac{1}{2} & -8\cdot\frac{1}{2} & 8\cdot\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

11.5 Enhetsmatrise/identitetsmatrise

En **enhetsmatrise/identitetsmatrise** av størrelse $n \times n$ er en kvadratisk matrise med 1 langs diagonalen fra øverste venstre hjørne til nederste høyre hjørne og 0 ellers. Eksempel på en 3×3 enhetsmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.6 Radredusering

Ved å bruke radoperasjonene for å få koeffisientmatrisen mest mulig lik en enhetsmatrise kalles **radredusering**. Gjør man det med eksempelmatrisen ovenfor får man følgende:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Og man har funnet en unik løsning på det opprinnelige systemet med $s_1 = 29, s_2 = 16, s_3 = 3$. To matriser er **radekvivalente** hvis det finnes en rekkefølge av elementære radoperasjoner som transformerer den ene matrisen til den andre. Hvis de augmenterte matrisene til to lineære systemer er radekvivalente så har systemene samme løsningsmengde.

11.7 Grunnleggende matrisedefinisjoner

Et **ledende tall** i en rad er det tallet lengst til venstre i en rad som ikke er lik 0. En **nullrad** er en rad der alle tall er 0. En rad er **ikkenull** om den inneholder minst ett tall som ikke er lik 0. En matrise er på **trappeform** (**Echelonform**) hvis den har følgende tre egenskaper:

1. Alle ikkenull-rader ligger over alle eventuelle nullrader.
2. Det ledende tallet i en rad ligger i en kolonne som er til høyre for det ledende tallet i raden over.
3. Alle tall i en kolonne under et ledende tall er 0.

Hvis en matrise på trappeform i tillegg har følgende egenskaper, så er matrisa på **redusert trappeform** (**redusert Echelonform**):

4. Det ledende tallet i alle ikkenull-rader er lik 1.
5. Hvert ledende 1-tall er det eneste tallet som ikke er lik 0 i kolonnen.

Følgende matriser er i hhv trappeform og red. trappeform:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

En **pivotposisjon** i en matrise A er en posisjon i A som korresponderer med et ledende 1-tall i den reduserte trappeformen til A. En **pivotkolonne** er en kolonne i A som inneholder en pivotposisjon. En **pivot** er et tall ulik 0 i en pivotposisjon som brukes til å lage 0'er i de andre radene i kolonnen vha radoperasjoner.

11.8 Representasjon av løsninger

Hvis en augmentert matrise på redusert trappeform har minst en nullrad, har systemet minst en **fri variabel**, og systemet har uendelig mange løsninger. F.eks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Tilsvarer systemet} \quad \begin{aligned} x_1 \qquad - 5x_3 &= 1 \\ x_2 + \; x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Variablene x_1 og x_2 kalles **ledende variabler**, mens x_3 her er en fri variabel. Slike konsistente systemer kan skrives som en **generell løsning** ved å løse det reduserte likningssystemet mhp de ledende variablene:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ er fri} \end{cases}$$

Her står løsningen på **parameterform**, men kan også omformes til **parametrisk vektorform** slik:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 5x_3 \\ 4 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$$

$$\text{der} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad t \in \mathbb{R}$$

11.9 Teoremer for løsninger

Teorem 1: Enhver matrise er radekvivalent med en og bare en matrise på redusert trappeform.

Teorem 2: Eksistens og entydighetsteorem. Et lineært system er konsistent hvis og bare hvis kolonnen lengst til høyre i en augmentert matrise *ikke* er en pivotkolonne, dvs hvis og bare hvis en trappeform av den augmenterte matrisa *ikke* har noen rad på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \end{bmatrix} \qquad \text{der} \quad b \neq 0$$

Hvis systemet er konsistent, da inneholder løsningsmengden enten (i) en unik løsning uten fri variabler eller (ii) uendelig mange løsninger med minst en fri variabel.

11.10 Summen/differansen av to matriser

Dette er definert for to matriser som er like store:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

11.11 Skalering av en matrise

En matrise kan ganges med et tall; Man ganger da alle tallene i matrisa med tallet:

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

11.12 Produktet av to matriser

Hvis antall kolonner i en matrise likt antall rader i en annen matrise, så kan de ganges sammen som i eksempelet her:

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & A{\cdot}B \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 17 & 3 & 4 \\ 15 & 7 & -8 & 4 \\ -3 & 27 & 11 & -4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 13 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 68 & -9 & -51 & 28 \\ 174 & 280 & -27 & 24 \\ 37 & 163 & 26 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

F.eks. så har -27 her kommet frem ved å plusse sammen produktet av tall fra 2. rad i A og 3. kolonne i B slik:

$$0 \cdot 3 + 13 \cdot (-8) + 7 \cdot 11 = -27$$

11.13 Regneregler for matriser

La A, B, C være vilkårlige matriser, I enhetsmatrisen og 0 være matrisen der alle tallene er lik null. Vi har da følgende regler for matriseregning (der størrelsene på matrisene er slik at den aktuelle formelen gir mening):

$$A + B = B + A$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$A + 0 = 0 + A = A$$
$$A - A = 0$$
$$A(BC) = (AB)C$$
$$AI = IA = A$$
$$A(B + C) = AB + AC$$

I tillegg er operasjonen A^k der $k \in \mathbb{N}$ definert som å gange A med seg selv k ganger. M^0 er definert til å være lik I.

11.14 Den inverse til en matrise

Hvis A er en kvadratisk matrise, så er A^{-1} definert slik at

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

En matrise A er inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Inversen til en 2×2-matrise er

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

11.15 Inverser i likningsløsing

Hvis $Y = AX$ og $|A| \neq 0$ så er $X = A^{-1}Y$

11.16 Negative eksponenter

Vi definerer $\quad A^{-k} = (A^{-1})^k \qquad k \in \mathbb{N}$

Som fører til $A^p A^q = A^{p+q}$ og $(A^p)^q = A^{qp}$

11.17 Inversen til et produkt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

11.18 Determinanter

Det generelle likningssystemet

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= p \\ cx_1 + dx_2 &= q \end{aligned}$$

Kan løses slik:

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Som gir

$$x_1 = \frac{dp - bq}{ad - bc}, \qquad x_2 = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

Dette betyr at det generelle 2×2-systemet har en entydig bestemt løsning når den såkalte **determinanten** $ad - bc \neq 0$. Hvis vi har følgende generelle system av n likninger med n ukjente:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

så kalles systemet **homogent** hvis $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ og **inhomogent** hvis minst en $b_i \neq 0$. Generelt kan vi da si at hvis D er determinanten til et lineært likningssystem med n likninger med n ukjente så har vi følgende fire muligheter:

	$D \neq 0$	$D = 0$
inhomogent	entydig bestemt løsning	enten uendelig mange løsninger, eller ingen løsninger
homogent	kun triviell løsning $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$	uendelig mange ikke-trivielle løsninger

Determinanten til en $2{\times}2$-matrise er:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinanten til en $3{\times}3$-matrise er:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

For $n \geq 3$ kan determinanten til en $n{\times}n$-matrise defineres rekursivt på følgende måte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}\det(M_1) - a_{12}\det(M_2) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(M_n)$ der $\det(M_i)$ er determinanten til den $(n-1) \times (n-1)$-matrisen som kommer frem når vi stryker rad 1 og kolonne i.

11.19 Cramers regel

La $D \neq 0$ være determinanten til koeffisientmatrisen til likningssystemet

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

Da har likningssystemet løsningen

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

$$\ldots,\ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{D}$$

11.20 Determinant ved kofaktorekspansjon

$$\text{Kofaktorekspansjon av } \begin{vmatrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ langs 3. kolonne:}$$

$$\begin{matrix} -11 & 2 & \boxed{17} & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{matrix} \qquad (-1)^{1+3} \cdot 17 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 17 \cdot 44 = 748$$

$$\begin{matrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & \boxed{9} & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{matrix} \qquad (-1)^{2+3} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (-9) \cdot (-232) = 2088$$

$$\begin{matrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & \boxed{-7} & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{matrix} \qquad (-1)^{3+3} \cdot -7 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 138 = -966$$

$$\begin{matrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & \boxed{3} & 4 \end{matrix} \qquad (-1)^{4+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 472 = -1416$$

$$\text{Det} = 748 + 2088 - 966 - 1416 = 454$$

11.21 Egenverdi og egenvektor

La A være en kvadratisk matrise. Et tall λ kalles en **egenverdi** for A hvis det finnes en vektor $\boldsymbol{x} \neq 0$ slik at

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ kalles en **egenvektor** for A med λ som **tilhørende egenverdi**. Vi har da at

$$A^k\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x}$$

Egenverdiene til matrisen A er de tallene λ som gir

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

11.22 Metode for å finne egenverdiene og egenvektorene

1. Regn ut determinanten $\det(A - \lambda I)$, som blir et polynom i λ av grad n.
2. Løs likningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Egenverdiene til A er alle løsningene λ av denne likningen. Eventuelle komplekse løsninger regnes også som egenverdier til A.
3. For hver reell egenverdi λ, løs likningen $(A - \lambda I)X = 0$. De løsningene X som ikke er lik 0, er egenvektorene til A med λ som tilhørende egenverdi.

11.23 Norm

Normen til $\boldsymbol{v}$ er den ikke-negative skalaren

$$||\boldsymbol{v}\,|| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

11.24 Gram-Schmidt-prosessen

Hvis $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p\}$ er en basis for et underrom W i $\mathbb{R}^n$, så er $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ en ortogonal basis for W der

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{v}_p &= \boldsymbol{x}_p - \frac{\boldsymbol{x}_p \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{\boldsymbol{x}_p \cdot \boldsymbol{v}_{p-1}}{\boldsymbol{v}_{p-1} \cdot \boldsymbol{v}_{p-1}}\boldsymbol{v}_{p-1} \end{aligned}$$

I tillegg så har vi

$$\text{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} = \text{Span}\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\} \text{ for } 1 \leq k \leq p$$

En ortonormal basis $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}$ får vi ved å dele hver av vektorene i den ortogonale basisen på sin egen norm:

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{1}{||\boldsymbol{v}_k||}\boldsymbol{v}_k \qquad \text{for } 1 \leq k \leq p$$

12 Differensiallikninger

12.1 Noen enkle 1. ordens likninger

Hvis $y(t)$ er kontinuerlig på et intervall I, så har vi følgende løsninger av forskjellige differensiallikninger på intervallet:

$$y' = ay \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{at}$$

$$y' = ay + b \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{at} - \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} y' &= ay^2 + by + c \\ &= a(y-A)(y-B) \quad \Rightarrow \quad y = A + \frac{B-A}{1+ke^{(B-A)at}} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \text{og} \quad y \equiv A \end{aligned}$$

12.2 1. ordens inhomogen lineær

$$y' + p(t)y = g(t)$$

har løsningen

$$y = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} g(t)\,\mathrm{d}t + Ce^{-P(t)}$$

der $P(t)$ er en vilkårlig antiderivert av $p(t)$

12.3 Separable differensiallikninger

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

12.4 Høyere ordens med konstante koeffisienter

En høyere ordens differensiallikning med konstante koeffisienter er en likning

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

Den **tilhørende homogene** differensiallikningen får vi ved å bytte ut høyresiden $f(t)$ med 0. Vi får da

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Vi løser en homogen høyere ordens differensiallikninger med konstante koeffisienter ved først å løse den karakteristiske likningen

$$a_n r^n + \cdots + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

som har røtter $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Deretter finner vi løsningene $y_1, y_2, \ldots, y_n$ til den homogene differensiallikningen ved følgende regel:

Hvis $r_k = a+bi$, og denne roten har forekommet m ganger før, er

$$y_k(t) = \begin{cases} t^m e^{at}\cos(bt) & \text{hvis } b \geq 0 \\ t^m e^{at}\sin(bt) & \text{hvis } b < 0 \end{cases}$$

«pluss rimer på cos, minus rimer på sinus»

Den **komplementære løsningen** y_C er da

$$y_C = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdot + c_n \cdot y_n$$

12.5 Partikulær løsning

Partikulær løsning kan du finne når du kjenner $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Hvis differensiallikningen var av 2. orden har du kun 2 løsninger y_1 og y_2, og da har du en snarvei for y_P som ser slik ut (bruk ikke $+C$ for integralene):

$$y_P = y_1 \cdot \int \frac{-y_2 \cdot f(t)}{|W|}\mathrm{d}t + y_2 \cdot \int \frac{y_1 \cdot f(t)}{|W|}\mathrm{d}t$$

der $|W|$ er **Wronski-determinanten** av y_1, y_2:

$$|W| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Hvis differensiallikningen er av orden $n > 2$, kan du ikke bruke denne snarveien. Da må du løse følgende matriselikning (F.eks. med Cramers regel):

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Deretter finner du $u(t) = \int u'(t)\mathrm{d}t$ (bruk ikke $+C$ for integralene), og til slutt

$$y_P = u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2 + \cdots u_n \cdot y_n$$

13 Matrisetransformasjoner

13.1 Rotasjonsmatrise i 2D

Rotasjon som dreier en vektor mot klokka en vinkel θ:

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

13.2 Rotasjon av en graf $y = f(x)$

Grafen til en likning med y og x roteres med en vinkel θ ved å bytte ut x og y i likningen med hhv. x- og y-komponenten til

$$\boldsymbol{R}(-\theta) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) \\ -x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

13.3 Skalering med diagonalmatriser

En **kvadratisk matrise** har like mange rader og kolonner. Diagonalen i en kvadratisk matrise betyr elementene fra øverste venstre hjørne til nederste høyre hjørne. Kvadratiske matriser kan være symmetriske. Da er verdien på elementene speilet om diagonalen like. En symmetrisk 2×2-matrise kan skrives slik:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & b \\ b & a_{22} \end{bmatrix}$$

En **diagonalmatrise** er en symmetrisk matrise der alle de symmetriske verdiene er lik 0. En 2×2-diagonalmatrise kan skrives:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

En diagonalmatrise skalerer vektorer langs x- og y-aksene:

$$\boldsymbol{Dp} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot p_1 \\ a_{22} \cdot p_2 \end{bmatrix}$$

13.4 Skalering med symmetriske matriser

Sporet (trasen) til en matrise: $\operatorname{tr} \boldsymbol{M} = a_{11} + a_{22}$. Determinanten til en matrise: $\det \boldsymbol{M} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. En matrise $\boldsymbol{M}$ er positiv hvis $\operatorname{tr} \boldsymbol{M} \geq 0$ og $\det \boldsymbol{M} \geq 0$.

13.5 Egenverdier

En symmetrisk matrise skalerer vektorer med faktorer som kalles matrisens **egenverdier**. Egenverdiene til matrisen $\boldsymbol{M}$ regnes ut med formelen

$$g = \frac{1}{2}\left(m_{11} + m_{22} \pm \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}\right)$$

$$\boldsymbol{M} \text{ er positiv} \quad \Leftrightarrow \quad g_1 \geq 0 \quad \text{og} \quad g_2 \geq 0$$

Egenverdiene g_1 og g_2 utgjør **spekteret** til $\boldsymbol{M}$. Det å finne dem kalles **spektralanalyse**. Hvis $\boldsymbol{M}$ er en diagonalmatrise så er egenverdiene lik elementene på diagonalen til $\boldsymbol{M}$. Skalering skjer langs matrisens egenakser som går langs matrisens egenvektorer. Egenvektorene $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ regnes ut med formlene

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g_1 - m_{11} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g_2 - m_{11} \end{bmatrix}$$

Egenakser står alltid vinkelrett på hverandre.

For en symmetrisk matrise $\boldsymbol{M}$ med egenverdier g_1 og g_2 og tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ så er de følgende såkalte egenverdilikningene oppfylt:

$$\boldsymbol{Mu} = g_1\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{Mv} = g_2\boldsymbol{v}$$

13.6 Matriserotasjon

Egenaksene til en symmetrisk matrise $\boldsymbol{M}$ kan roteres med en vinkel θ med formelen

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{R}(\theta) \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{R}(-\theta)$$

Hvis $\boldsymbol{M}$ roteres slik at egenaksene går langs x- og y-aksene så blir $\boldsymbol{N}$ en diagonalmatrise. Dette kalles å diagonalisere $\boldsymbol{M}$.

Omvendt så kan en diagonalmatrise $\boldsymbol{D}$ som skalerer langs x- og y-aksene roteres med en vinkel θ for å skalere langs andre akser, slik:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}(-\theta) \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{R}(\theta)$$

13.7 Translasjon (flytting)

Et punkt $\boldsymbol{p}$ kan **transleres** ved å legge til en vektor $\boldsymbol{d}$ slik at punktet blir flyttet til $\boldsymbol{p'}$ slik:

$$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d}$$

Å flytte i *retningen* til $\boldsymbol{d}$, en lengde på k, gjøres slik:

$$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|} \cdot k$$

Men for å translere punkter med matrisemultiplikasjon trengs homogene koordinater.

13.8 Homogene 2D-koordinater

Et punkt i planet kan representeres med vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Det samme punktet representeres i **homogene koordinater** slik:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13.9 Homogene transformasjoner

Homogene transformasjoner utføres alltid ved å gange en transformasjonsmatrise med en vektor. Resultatet er en ny vektor som er den transformerte vektoren.

13.10 Homogen translasjon i 2D

Et punkt $\boldsymbol{p}$ kan transleres til punktet $\boldsymbol{p'}$ med en vektor $\boldsymbol{a}$ og translasjonsmatrisen $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})$ definert slik:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13.11 Homogen rotasjon i 2D

Rotasjon som dreier en vektor mot klokka en vinkel θ:

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13.12 Homogen skalering i 2D

Transformasjon med en symmetrisk matrise $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & b & 0 \\ b & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13.13 Kombinasjoner av transformasjoner

En transformasjon kan settes sammen av andre. F.eks. for først å rotere $\boldsymbol{p}$ med en vinkel på 45°, så translere med vektoren $\boldsymbol{a}$, og til slutt å rotere med en vinkel på 32°:

$$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{R}(32°) \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{R}(45°) \cdot \boldsymbol{p}$$

Transformasjonen som utføres sist skal stå først!

13.14 Rotasjon/skalering om et punkt

En vanlig rotasjonstransformasjon vil utføres med origo som sentrum. For å rotere om en vilkårlig akse $\boldsymbol{a}$ brukes transformasjonen

$$\boldsymbol{R}(\theta, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{R}(\theta)\cdot\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{a})$$

Tilsvarende gjelder for skalering.

13.15 Rotasjoner i rommet

Rotasjon av en tredimensjonal vektor $\boldsymbol{r}$ kan utføres med en 3×3-matrise $\boldsymbol{M}$ med to parametere:

1) En enhetsvektor $\boldsymbol{n}$ som bestemmer rotasjonsakse og rotasjonsretning; Om $\boldsymbol{n}$ står vinkelrett ut fra midten av en klokke, vil rotasjonen foregå motsatt vei av viserene.
2) Rotasjonsvinkelen θ.

Den roterte vektoren $\boldsymbol{r'}$ kan regnes ut uten å bruke en rotasjonsmatrise, slik (Goldstein, Charles P. Poole & Safko, 2000):

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r}\cdot\cos(\theta) + \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})\cdot(1-\cos(\theta)) + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\cdot\sin(\theta)$$

Rotasjonsmatrisen blir slik:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta) = \boldsymbol{I}\cdot\cos(\theta) + \boldsymbol{N}\cdot(1-\cos(\theta)) + \boldsymbol{A}\cdot\sin(\theta)$$

Der $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{N}$ og $\boldsymbol{A}$ er definert som følger:

$\boldsymbol{I}$ er den såkalte **identitetsmatrisen**, som er en diagonalmatrise med 1 langs diagonalen, altså

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{N}$ er **tensorproduktet** $\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$, dvs $N_{ij} = n_i\cdot n_j$:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} n_1\cdot n_1 & n_1\cdot n_2 & n_1\cdot n_3 \\ n_2\cdot n_1 & n_2\cdot n_2 & n_2\cdot n_3 \\ n_3\cdot n_1 & n_3\cdot n_2 & n_3\cdot n_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

13.16 Homogene 3D-koordinater

Et punkt i rommet kan representeres med vektoren

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Det samme punktet representeres i homogene koordinater slik:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13.17 Homogen translasjon i 3D

Translasjonsmatrisen $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})$ for 3 dimensjoner er definert slik:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13.18 Homogen rotasjon i 3D

Dette fungerer på tilsvarende måte som i 2D; Rotasjonsmatrisen $\boldsymbol{R}$ regnes ut og representeres i homogene koordinater med matrisen

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13.19 Rotasjon om vilkårlig akse

En rotasjon en vinkel θ om en akse som er parallell til vektoren $\boldsymbol{n}$, men som går gjennom punktet $\boldsymbol{a}$ er representert av matrisen

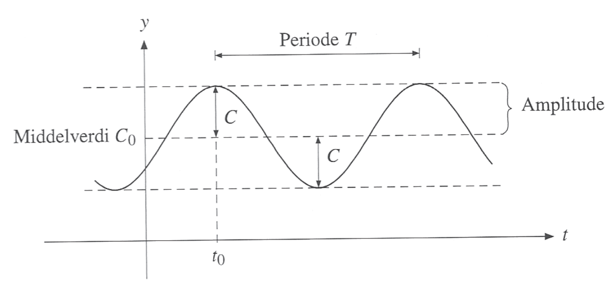
$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta,\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)\cdot\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{a})$$

14 Anvendt matematikk

14.1 Periodiske fenomener

Et **periodisk fenomen** kan ofte tilpasses med funksjonen

$$y = C_0 + C\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot(t-t_0)\right)$$



14.2 Sirkelfrekvens

Hvis T er perioden til en harmonisk svingning, så kaller vi størrelsen $2\pi/T$ svingningens **sirkelfrekvens** ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \Leftrightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La ω være et positivt tall. Funksjonene $\cos\omega t$ og $\sin\omega t$ gir harmoniske svingninger med sirkelfrekvens ω og periode $T = 2\pi/\omega$.

14.3 Interferens

Gitt $C_1, C_2 \geq 0$ og

$$f(t) = C_1\cdot\cos(\omega\cdot t-\phi_1) \qquad \text{og} \qquad g(t) = C_2\cdot\cos(\omega\cdot t-\phi_2)$$

Amplituden C til funksjonen $f(t)+g(t)$ er da gitt ved

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cdot \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

og middelverdien er 0.

14.4 Eksponentialfunksjon med a som grunntall

Funksjoner på formen

$$f(t) = a^t$$

der $t \in \mathbb{R}$ og $a \in \mathbb{R}^+$ kalles **eksponentialfunksjoner**. a kalles **grunntallet**.

En funksjon på formen $f(t) = c \cdot a^t$ kan tilpasses til å gå gjennom punktene (t_1, y_1) og (t_2, y_2) hvis $t_1 \neq t_2$ og ingen av punktene ligger i origo. Formlene for dette ser slik ut:

$$a = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}}$$

$$c = \frac{y_1}{a^{t_1}} = \frac{y_2}{a^{t_2}}$$

Hvis $t_1 < t_2$ så har vi at

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} = \frac{c \cdot a^{t_2}}{c \cdot a^{t_1}} = a^{t_2 - t_1}$$

Dvs at eksponentialfunksjoner har samme vekstfaktor over alle intervaller av samme lengde.

14.5 Økning/minking med p % per år

En størrelse y som **vokser/avtar** eksponentielt med p % per år og er lik y_0 ved tiden t_0 kan beskrives med funksjonen

$$y(t) = c \cdot a^t \qquad \text{der} \qquad a = 1 \pm \frac{p}{100} \quad \text{og} \quad c = \frac{y_0}{a^{t_0}}$$

14.6 Eksponentialfunksjon med e som grunntall

Funksjonen $f(x) = a^x$ kan skrives:

$$f(x) = e^{\lambda x} \qquad \text{der} \quad \lambda = \ln a \geq 0, \quad \text{hvis } 0 < a < 1$$
$$f(x) = e^{-\lambda x} \qquad \text{der} \quad \lambda = -\ln a \geq 0, \quad \text{hvis } a > 1$$

Hvis f er voksende, er **doblingstiden** $T_2 = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.

Hvis f er avtakende, er **halveringstiden** $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.

14.7 Funksjonen pH

pH er en funksjon som gir et mål på hvor mange H_3O^+-molekyler det finnes per liter i en væskeløsning. Denne konsentrasjonen skrives som $\left[H_3O^+\right]$ og har benevning mol/L. Denne funksjonen er definert slik:

$$pH\left(\left[H_3O^+\right]\right) = -\log\left(\left[H_3O^+\right]\right)$$

$pH > 7$ betyr en basisk løsning. $pH < 7$ betyr en sur løsning.

14.8 Aldersbestemmelse etter ^{14}C-metoden

Hvis I_0 er forholdet mellom ^{14}C og ^{12}C i en levende organisme når den dør, så vil følgende funksjon $I(t)$ beskrive forholdet mellom mengden ^{14}C som er igjen i liket i forhold til I_0 etter tiden t:

$$I(t) = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730}$$

14.9 Potensfunksjonen

Hvis punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ligger i første kvadrant og $x_1 \neq x_2$, så vil parameterne r og c til potensfunksjonen $f(x) = cx^r$ som går gjennom begge punktene være gitt ved

$$r = \frac{\ln(y_2/y_1)}{\ln(x_2/x_1)}$$
$$c = \frac{y_1}{x_1^r} = \frac{y_2}{x_2^r}$$

14.10 Allometrisk vekst

Om vi lar kroppens vekstrate være $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ og en kroppsdels vekstrate være $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ og antar at kroppsdelens spesifikke vekstrate er proporsjonal med kroppens spesifikke vekstrate får vi

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad y = Cx^r$$

Dette kalles **allometrisk vekst**.

14.11 Logaritmisk skala

Brukes for å sammenlikne størrelser av ulik størrelsesorden, der størrelsesordenen til et tall er gitt ved logaritmen (med grunntall 10) til tallet. Å plassere et (positivt) tall r på en logaritmisk skala svarer til å plassere $\log r$ på den tilsvarende lineære skalaen.

Et **enkeltlogaritmisk koordinatsystem** med to akser har logaritmisk skala på den ene aksen og lineær skala på den andre aksen. Et **dobbeltlogaritmisk koordinatsystem** med to akser har logaritmisk skala på begge aksene.

Enhver eksponentialfunksjon $y = ca^x$ gir en rett linje når den plottes i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem med logaritmisk skala på y-aksen og lineær skala på x-aksen.

Enhver potensfunksjon $y = cx^r$ gir en rett linje når den plottes i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

14.12 Anvendelser av bestemt integral

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{tilbakelagt veilengde} \\ s'(t) = v(t) &= \text{banehastighet} \\ S = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t &= s(t_1) - s(t_0) \\ &= \text{tilbakelagt veilengde i løpet av } [t_0, t_1] \end{aligned}$$

$$V(t) = \text{vannvolum i et kar ved tiden } t$$
$$V'(t) = v(t) = \text{tilstrømningshastighet}$$
$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = V(t_1) - V(t_0)$$
$$= \text{økning i vannvolum i løpet av } [t_0, t_1]$$

$$F(t) = \text{Effekten i kW ved tiden } t$$
$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)\,\mathrm{d}t = \text{Energien i kWh i løpet av } [t_0, t_1]$$

14.13 Malthus' modell

La spesifikk vekstrate være definert som $\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$, som kan tolkes som antall avkom et individ i en befolkning produserer per tidsenhet. Antar vi at denne størrelsen er konstant får vi

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = aN \quad \Rightarrow \quad N = Ce^{at}$$

$a > 0$ gir "vekst" og $a < 0$ gir "nedgang". a kalles vekstfaktoren. Funksjonen kan brukes til å modellere f.eks. ubegrenset vekst eller radioaktiv nedbrytning.

14.14 Verhulsts modell

La bæreevnen B til befolkningen være så mange individer omgivelsene kan livnære. Om vi antar at spesifikk vekstrate er proporsjonal med forskjellen i bæreevne og antall individer, får vi

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = a\cdot(B - N) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -aN\cdot(N - B)$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{B}{1 + ke^{-aBt}}$$

14.15 Radioaktiv nedbrytning

Om vi antar at endringen i antall radioaktive atomkjerner er proporsjonal med antallet kjerner får vi

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N \quad \Rightarrow \quad N = Ce^{-\lambda t}$$

$$\text{med halveringstid } t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

14.16 Newtons avkjølingslov

Anta at et legeme avkjøles i omgivelser med konstant temperatur T_*. La $T_1 = T(t_1)$ være legemets temperatur ved tiden t_1 og $T_2 = T(t_2)$ være legemets temperatur ved tiden t_2 og $t_1 < t_2$. Vi definerer avkjølingsraten til å være $-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$. Hvis vi antar at avkjølingsraten er proporsjonal med temperaturdifferansen $T - T_*$ får vi

$$-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k\cdot(T - T_*) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k\cdot(T - T_*)$$

$$\Rightarrow \quad T = T_* + Ce^{-kt}$$

der

$$k = \frac{\ln((T_1 - T_*)/(T_2 - T_*))}{t_2 - t_1}$$

og

$$C = (T_1 - T_*)e^{kt_1} = (T_2 - T_*)e^{kt_2}$$

14.17 Vekstrate

Vekstraten til f med hensyn på x ved x_0 er den deriverte til f ved x_0, $f'(x_0)$. Hvis da $s = f(t)$ er funksjonen for posisjonen s med hensyn på tiden t, så har vi følgende:

$s(t) = f(t)$	posisjon
$v(t) = s'(t)$	fart
$a(t) = v'(t) = s''(t)$	akselerasjon
$j(t) = a'(t) = v''(t) = s^{(3)}(t)$	rykk

14.18 Vektorfunksjoner for bevegelse

Posisjon: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$

Hastighet: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} + z'(t)\vec{k}$

Fart: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

Akselerasjon: $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = x''(t)\vec{\imath} + y''(t)\vec{\jmath} + z''(t)\vec{k}$

14.19 Moment, masse og massesenter

Moment, **masse** og **massesenter** til en tynn stang langs x-aksen med **tetthetsfunksjon** $\delta(x)$:

Moment om origo	$M_0 = \int_a^b x\cdot\delta(x)\,\mathrm{d}x$
Masse	$M = \int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x$
Massesenter	$\overline{x} = \frac{M_0}{M}$

Momenter, masse og massesenter til en tynn plate:

Massesenter til en "stripe"	$(\tilde{x}, \tilde{y})$	
Massetettetsfunksjon	δ	
Massen til en stripe	$\mathrm{d}m = \delta\cdot$lengde$\cdot$bredde	
Moment om x-aksen	$M_x = \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m$	
Moment om y-aksen	$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m$	
Massen til plata	$M = \int\,\mathrm{d}m$	
Massesenter til plata	$\overline{x} = \frac{M_y}{M}$	$\overline{y} = \frac{M_x}{M}$

stripe || x-aksen $\Leftrightarrow$ $\tilde{y} = y$, bredde $= \mathrm{d}y$

stripe || y-aksen $\Leftrightarrow$ $\tilde{x} = x$, bredde $= \mathrm{d}x$

14.20 Vektor- og Matriseregning i Maxima

Kommandoer gis til programmet med tekst + `Shift+Enter`. For å regne på vektorer og matriser må man først kjøre kommandoen `load(vect)`. Alle svar får navn på formen `%o`+tall og kan refereres til ved dette navnet i følgende utregninger. Sinus og cosinus regnes ut med funksjonene `sin()` og `cos()`. Programmet regner kun med radianer. Referer til π med `%pi`.

Lage en vektor: `p:[1,1,2]`
Legge sammen vektorer: `p+q`
Tall ganger vektor: `3*p`
Skalarprodukt: `p.q` (med punktum)
Lengde av vektor: `sqrt(p.p)`
Lage matrise: Velg i menyen: `Algebra`→`Enter Matrix`...
Gange matrise med vektor: `A.p`
Gange matrise med matrise: `A.B`
Kryssprodukt: `p~q`
Noen uttrykk må tvinges frem med: `express()`
Svar som desimaltall: `float()`
Antall siffer i svar kan stilles med: `fpprintprec:4`
Dette setter antall siffer i svar til 4.
Funksjoner kan lages med operatoren `:=`
F.eks. kan man bruke menyen for å sette inn en 2×2 rotasjonsmatrise og så navigere seg til uttrykket med piltastene og redigere så det ser slik ut (med shift+enter etterpå):

```
R(t):= matrix(
 [cos(t),-sin(t)],
 [sin(t),cos(t)]
);
```

For filer som åpnes i programmet wxMaxima, så må programmet regne ut alle uttrykkene på nytt. Dette gjøres med menyvalget `Cell`→`Evaluate All Cells` (Ctrl+R).

		mil	km			m	dm	cm	mm			μm		

		tonn			kg	hg		g			mg		

		mil^2		km^2		hektar	mål dekar	ar		m^2		dm^2		cm^2		mm^2						μm^2		

		mil^3			km^3									m^3			liter dm^3	dl	cl	ml cm^3			μl mm^3									μm^3		

De 24 bevegelsesformlene med konstant akselerasjon

$$
\begin{aligned}
s &= \text{posisjon}\\
s_0 &= \text{posisjon når } t = 0\\
v &= \text{fart}\\
v_0 &= \text{fart når } t = 0\\
a &= \text{akselerasjon}\\
t &= \text{tid}
\end{aligned}
$$

Utledning: Antar $a(t) = a$ (konstant), $v'(t) = a(t)$ og $s'(t) = v(t)$. Dette fører til $v(t) = at + v_0$ og $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$, dvs 2 likninger med 6 variabler. Disse kan løses mhp én variabel på 24 måter, som vist i tabellen under.

$$s(s_0, v_0, a, t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0 \qquad s_0(s, v_0, a, t) = -\tfrac{1}{2}at^2 - v_0t + s$$

$$s(s_0, v, v_0, t) = \tfrac{1}{2}(v + v_0)t + s_0 \qquad s_0(s, v, v_0, t) = -\tfrac{1}{2}(v + v_0)t + s$$

$$s(s_0, v, a, t) = -\tfrac{1}{2}at^2 + vt + s_0 \qquad s_0(s, v, a, t) = \tfrac{1}{2}at^2 - vt + s$$

$$s(s_0, v, v_0, a) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + s_0 \qquad s_0(s, v, v_0, a) = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} + s$$

$$v(v_0, a, t) = at + v_0 \qquad v_0(v, a, t) = -at + v$$

$$v(s, s_0, v_0, t) = \frac{2(s - s_0)}{t} - v_0 \qquad v_0(s, s_0, v, t) = \frac{2(s - s_0)}{t} - v$$

$$v(s, s_0, a, t) = \tfrac{1}{2}at + \frac{s - s_0}{t} \qquad v_0(s, s_0, a, t) = -\tfrac{1}{2}at + \frac{s - s_0}{t}$$

$$v(s, s_0, v_0, a) = \pm\sqrt{{v_0}^2 + 2a(s - s_0)} \qquad v_0(s, s_0, v, a) = \pm\sqrt{v^2 + 2a(s_0 - s)}$$

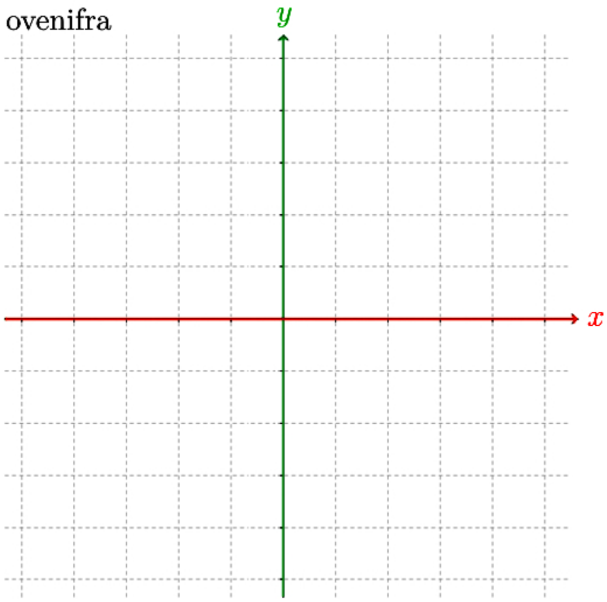
$$a(v, v_0, t) = \frac{v - v_0}{t} \qquad t(v, v_0, a) = \frac{v - v_0}{a}$$

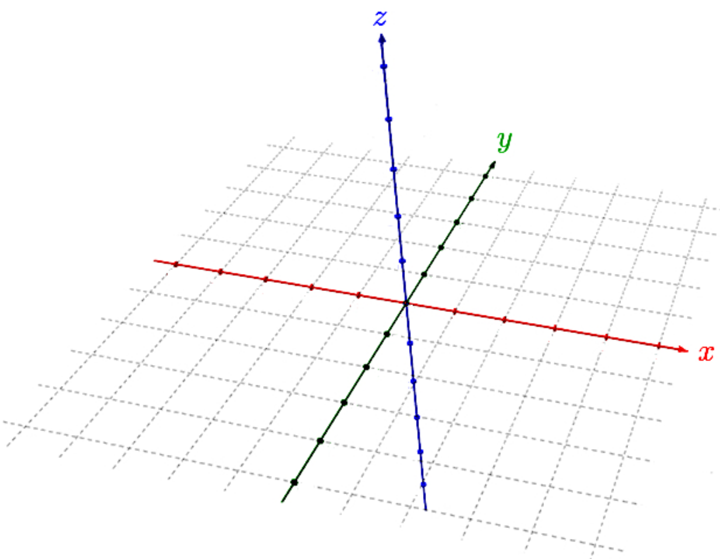
$$a(s, s_0, v_0, t) = \frac{2(s - s_0 - v_0t)}{t^2} \qquad t(s, s_0, v_0, a) = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2a(s - s_0)}}{a}$$

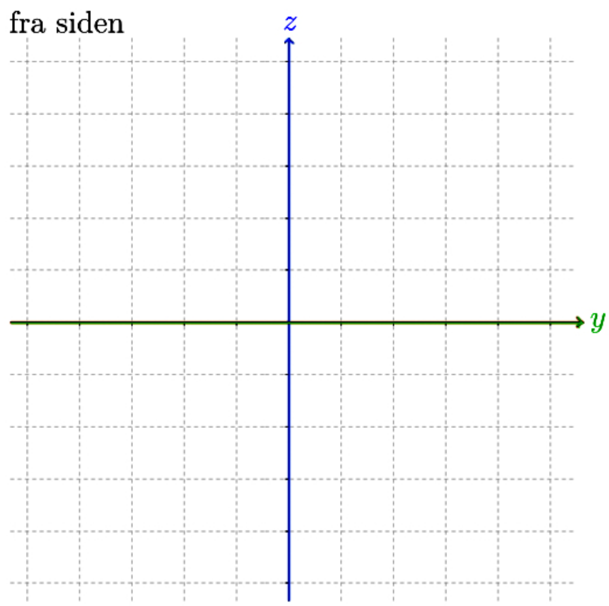
$$a(s, s_0, v, t) = \frac{2(vt - s + s_0)}{t^2} \qquad t(s, s_0, v, a) = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 2a(s_0 - s)}}{a}$$

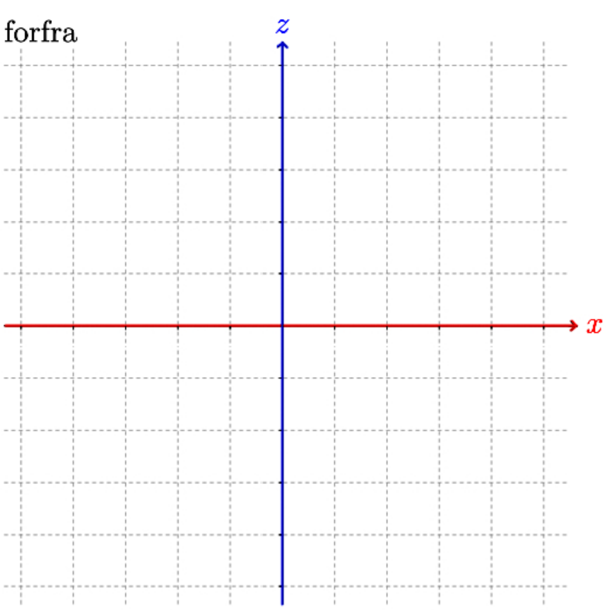
$$a(s, s_0, v, v_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2(s - s_0)} \qquad t(s, s_0, v, v_0) = \frac{2(s - s_0)}{v + v_0}$$

`trondal.com/bf.pdf` (CC BY-NC) Mai 2013 Jostein Trondal

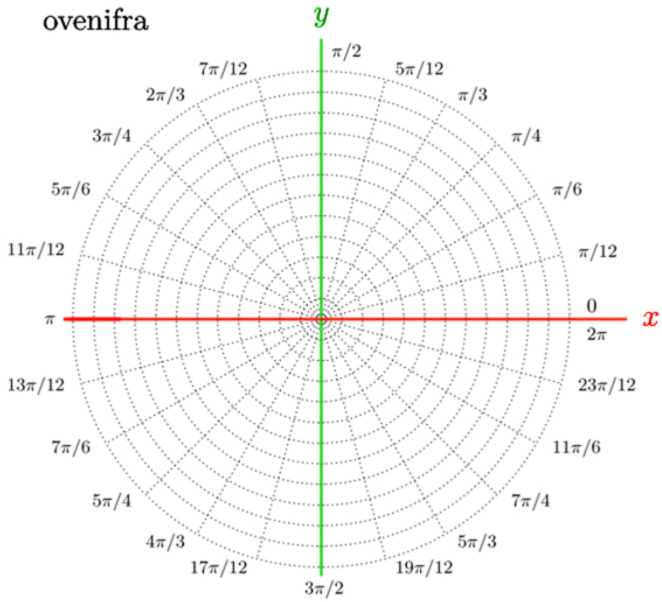

ovenifra
y
x

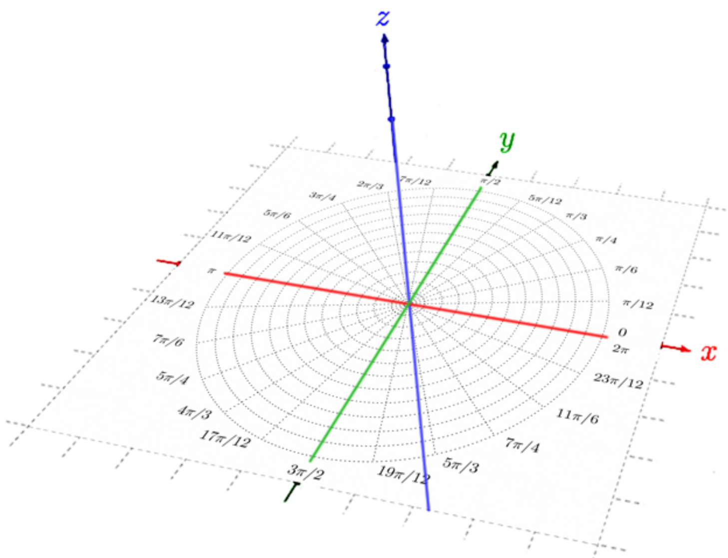

z
y
x


fra siden
z
y

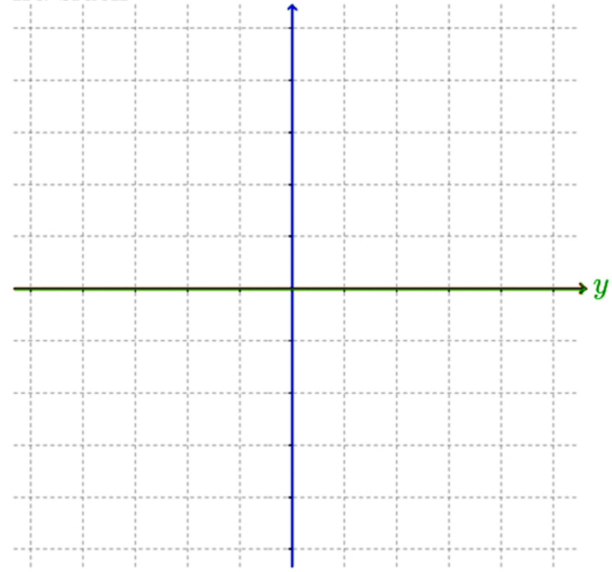

forfra
z
x

ovenifra

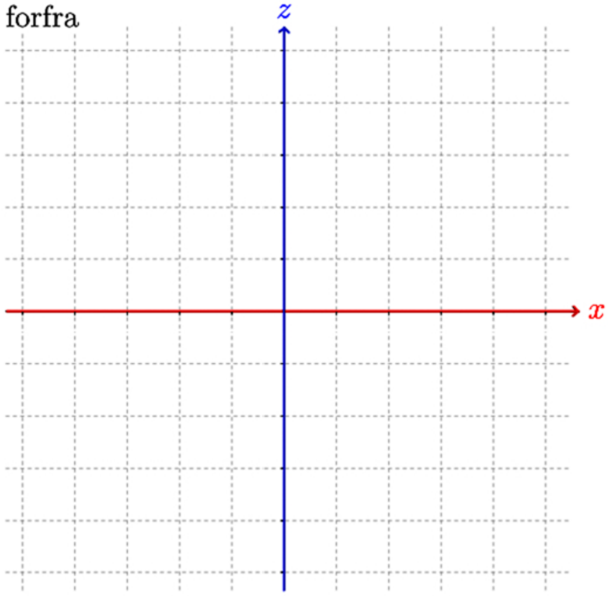


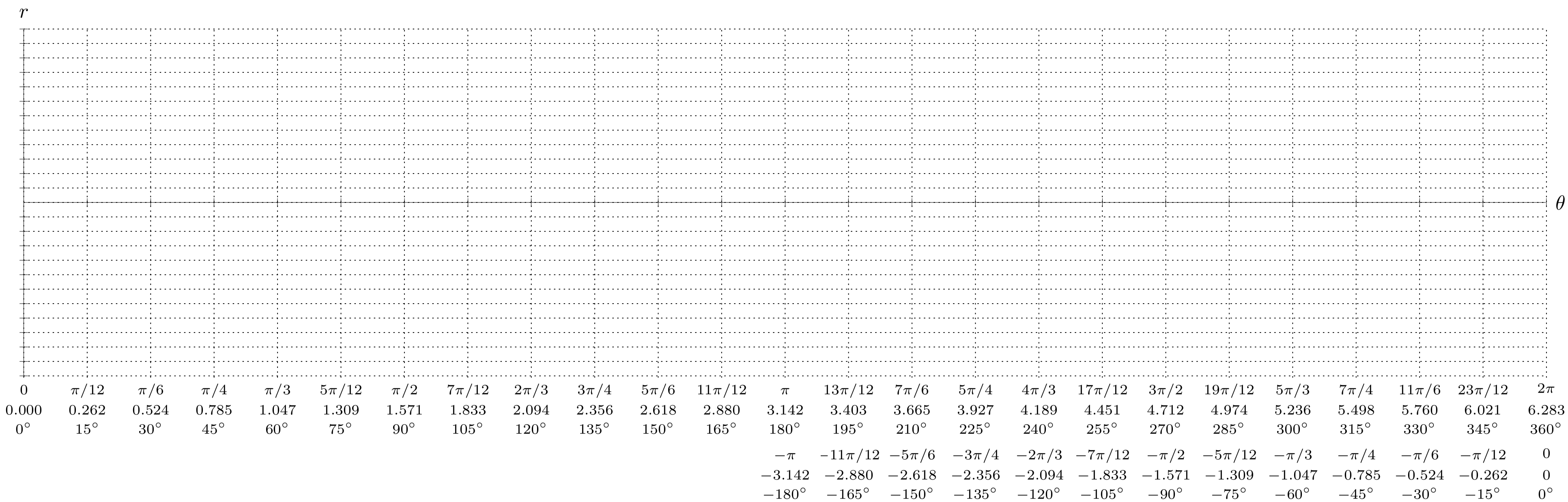


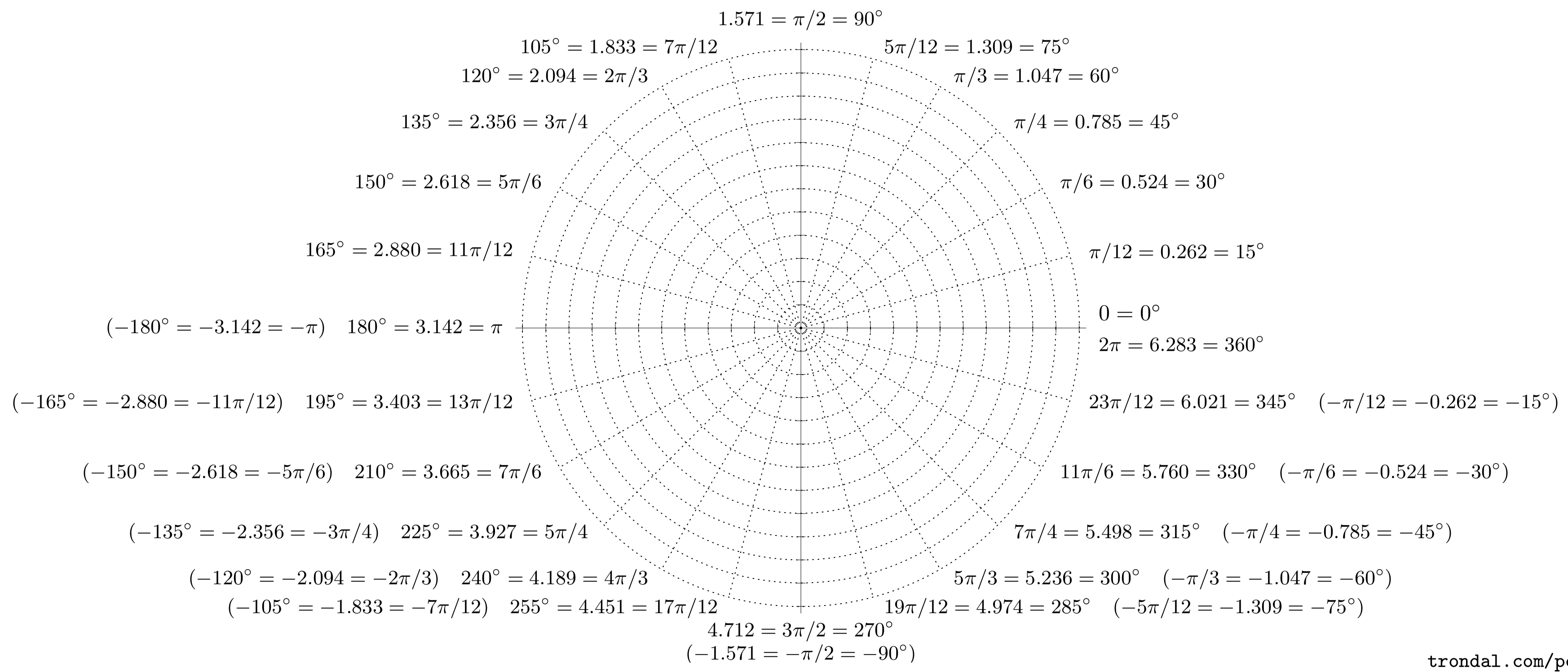
fra siden



forfra







trondal.com/polar.pdf

Trigonometriske identiteter

Enhetsformelen

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

Tangens

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Trigonometriske resiproker

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Forskyvning || med x-aksen

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin(x)$$

$$\tan\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sin\left(x \pm \frac{3\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$$

$$\cos\left(x \pm \frac{3\pi}{2}\right) = \mp\sin(x)$$

$$\tan\left(x \pm \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$$

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x)$$

$$\tan(x + n\pi) = \tan(x)$$

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos(x)$$

$$\tan(x + 2n\pi) = \tan(x)$$

Speiling om y-aksen

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

Heltallig multippel av π

$$\sin(n\pi) = 0$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\tan(n\pi) = 0$$

Sum/differanse til produkt

$$\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a - b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a - b}{2}\right)$$

Speiling om y-aksen + Forskyvning || med x-aksen

$$\sin\left(\pm\frac{\pi}{2} - x\right) = \pm\cos(x)$$

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{2} - x\right) = \pm\sin(x)$$

$$\tan\left(\pm\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sin\left(\pm\frac{3\pi}{2} - x\right) = \mp\cos(x)$$

$$\cos\left(\pm\frac{3\pi}{2} - x\right) = \mp\sin(x)$$

$$\tan\left(\pm\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sin(n\pi - x) = (-1)^{n+1}\sin(x)$$

$$\cos(n\pi - x) = (-1)^n \cos(x)$$

$$\tan(n\pi - x) = -\tan(x)$$

$$\sin(2n\pi - x) = -\sin(x)$$

$$\cos(2n\pi - x) = \cos(x)$$

$$\tan(2n\pi - x) = -\tan(x)$$

Sum/differanse av to vinkler

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

Produkt til sum

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

$$\cos(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$\tan(a) \cdot \tan(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)}$$

Dobbel vinkel

$$\sin(2x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan(x)^2}$$

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$$

$$\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin(x)^2$$

$$\cos(2x) = \frac{1 - \tan(x)^2}{1 + \tan(x)^2}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)^2}$$

Trippel vinkel

$$\sin(3x) = -\sin(x)^3 + 3\cos(x)^2\sin(x)$$

$$\sin(3x) = -4\sin(x)^3 + 3\sin(x)$$

$$\cos(3x) = \cos(x)^3 - 3\sin(x)^2 \cdot \cos(x)$$

$$\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$$

$$\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - 3\tan(x)^3}{1 - 3\tan(x)^2}$$

Halv vinkel

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1 + \cos(x)}{2}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

Reduksjon av eksponent

$$\sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(x)^3 = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$$

$$\cos(x)^3 = \frac{3\cos(x) + \cos(3x)}{4}$$

Laplacetransformasjon

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$
$f(t)$	$F(s)$
$a\cdot f(t) + b\cdot g(t)$	$a\cdot F(s) + b\cdot G(s)$
f'	$s\cdot F(s) - f(0)$
f''	$s^2\cdot F(s) - s\cdot f(0) - f'(0)$
$f^{(n)}$	$s^n\cdot F(s) - s^{n-1}\cdot f(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$
$f(t-a)\cdot u(t-a)$	$e^{-as}\cdot F(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
$t f(t)$	$-F'(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$

Omforming av uttrykk ved parallellforskyving:

$$e^{at}\cdot f(t) \quad \longleftrightarrow \quad f(t) \quad \longleftrightarrow \quad F(s) \quad \longleftrightarrow \quad F(s-a)$$

$$f(t-a)\cdot u(t-a) \quad \longleftrightarrow \quad f(t) \quad \longleftrightarrow \quad F(s) \quad \longleftrightarrow \quad e^{-as}\cdot F(s)$$

$f(t) \longrightarrow$	$F(s)$		$F(s) \longrightarrow$	$f(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{1}{s}$	1
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	2	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	3	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	4	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}(t^{n-1} e^{at})$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	5	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	6	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	7	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	8	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\cos(\omega t)$
$t^2\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega(3s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}$	9	$\frac{3s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^3}$	$\frac{t^2}{2\omega}\sin(\omega t)$
$t^2\cos(\omega t)$	$\frac{2s(s^2-3\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}$	10	$\frac{s(s^2-3\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}$	$\frac{t^2}{2}\cos(\omega t)$
$t^n\sin(\omega t)$	$-\frac{\mathrm{Im}\left(n!(s-ik)^{n+1}\right)}{(s^2+k^2)^{n+1}}$	11	$-\frac{\mathrm{Im}\left(n!(s-ik)^{n+1}\right)}{(s^2+k^2)^{n+1}}$	$t^n\sin(\omega t)$
$t^n\cos(\omega t)$	$\frac{\mathrm{Re}\left(n!(s+ik)^{n+1}\right)}{(s^2+k^2)^{n+1}}$	12	$\frac{\mathrm{Re}\left(n!(s+ik)^{n+1}\right)}{(s^2+k^2)^{n+1}}$	$t^n\cos(\omega t)$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	13	$\frac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{at}\sin(\omega t)$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	14	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos(\omega t)$
$e^{at} t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega(s-a)}{((s-a)^2+\omega^2)^2}$	15	$\frac{s-a}{((s-a)^2+\omega^2)^2}$	$e^{at}\frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$
$e^{at} t\cos(\omega t)$	$\frac{(s-a)^2-\omega^2}{((s-a)^2+\omega^2)^2}$	16	$\frac{(s-a)^2-\omega^2}{((s-a)^2+\omega^2)^2}$	$e^{at} t\cos(\omega t)$
$e^{at} t^2\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega(3(s-a)^2-\omega^2)}{((s-a)^2+\omega^2)^3}$	17	$\frac{3(s-a)^2-\omega^2}{((s-a)^2+\omega^2)^3}$	$e^{at}\frac{t^2}{2\omega}\sin(\omega t)$
$e^{at} t^2\cos(\omega t)$	$\frac{2(s-a)((s-a)^2-3\omega^2)}{((s-a)^2+\omega^2)^3}$	18	$\frac{(s-a)((s-a)^2-3\omega^2)}{((s-a)^2+\omega^2)^3}$	$e^{at}\frac{t^2}{2}\cos(\omega t)$
$2\sqrt{t/\pi}$	$\frac{1}{s^{3/2}}$	19	$\frac{1}{s^{3/2}}$	$2\sqrt{t/\pi}$
$\sin(kt)\cdot\sinh(kt)$	$\frac{2k^2 s}{s^4+4k^4}$	20	$\frac{s}{s^4+4k^4}$	$\frac{1}{2k^2}\sin(kt)\cdot\sinh(kt)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	21	e^{-as}	$\delta(t-a)$
$u(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$	22	$\frac{1}{s}e^{-as}$	$u(t-a)$

Hvis $f(t)$ er en periodisk funksjon med periode $T > 0$, $D_f = [0, \infty\rangle$ og $V_f = \mathbb{R}$, så er

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-sr} f(t)\,\mathrm{d}t}{1 - e^{-sT}}$$

Grunnleggende derivasjon

f, g, u og v er funksjoner av x. a og c er konstanter.

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(c\cdot f)' = c\cdot f'$$
$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$$
$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{n-k}\cdot g^{k}$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - g'\cdot f}{g^2}$$
$$f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$
$$(f^g)' = f^g\cdot\left(f'\cdot\frac{g}{f} + g'\cdot\ln(f)\right) \qquad (f>0)$$
$$\left(a^f\right)' = f'\cdot a^f\cdot\ln(a) \qquad (a>0)$$
$$c' = 0$$
$$x' = 1$$
$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$$
$$(x^x)' = x^x\cdot\big(1+\ln(x)\big) \qquad (x>0)$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x\geq 0)$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (x\neq 0)$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = a^x\cdot\ln(a) \qquad (a>0)$$
$$\ln(x)' = \frac{1}{x} \qquad (x>0)$$
$$\ln(f)' = \frac{f'}{f} \qquad (f>0)$$
$$\log_a(x)' = \frac{1}{x\cdot\ln(a)} \qquad (a\neq 1)$$
$$\sin(x)' = \cos(x)$$
$$\cos(x)' = -\sin(x)$$
$$\tan(x)' = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1+\tan(x)^2$$
$$\sin^{-1}(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\cos^{-1}(x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$
$$\tan^{-1}(x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\sinh(x)' = \cosh(x)$$
$$\cosh(x)' = \sinh(x)$$
$$\tanh(x)' = \frac{1}{\cosh(x)^2}$$
$$\sinh^{-1}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\cosh^{-1}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\tanh^{-1}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

Integraler

$f(x)$ og $g(x)$ er funksjoner av den reelle variabelen x.

$a, b, c,$ og C er reelle tall. i, k, n, p og q er heltall.

$f(g)$ er funksjonssammensetningen $f(g(x)) = f\circ g$.

$$f' = f'(x) = (f)' = (f(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

$f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = (f')', \quad$ osv.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ slik at $F^{(1)}(x) = f(x)$.

$f^{(0)} = f$.

$$f^{(-1)} = \int f\,\mathrm{d}x, \quad f^{(-2)} = \int\left(\int f\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x, \text{ osv.}$$

Generelle formler

$$\int (a\cdot f + b\cdot g)\,\mathrm{d}x = a\int f\,\mathrm{d}x + b\int g\,\mathrm{d}x$$
$$\int f\,\mathrm{d}x = \int (f+a)\,\mathrm{d}x - ax$$
$$\int f\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int a\cdot f\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{f^{(1)}}{f}\,\mathrm{d}x = \ln|f| + C$$
$$\int e^f\cdot f^{(1)}\,\mathrm{d}x = e^f + C$$
$$\int f^n\cdot f^{(1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\cdot f^{n+1} + C$$
$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}f^{(-1)}(ax+b) + C$$
$$\int f(g)\cdot g^{(1)}\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = f^{(-1)}(g) + C \qquad (u\leftrightarrow g(x))$$
$$\int f\cdot g\,\mathrm{d}x = f\cdot g^{(-1)} - \int f^{(1)}\cdot g^{(-1)}\,\mathrm{d}x$$
$$\int f\cdot g\,\mathrm{d}x = f\cdot g^{(-1)} - f^{(1)}\cdot g^{(-2)} + \int f^{(2)}\cdot g^{(-2)}\,\mathrm{d}x$$
$$\begin{aligned}\int f\cdot g\,\mathrm{d}x = f\cdot g^{(-1)} & \\ & - f^{(1)}\cdot g^{(-2)} \\ & + f^{(2)}\cdot g^{(-3)} \\ & - f^{(3)}\cdot g^{(-4)} \\ & + f^{(4)}\cdot g^{(-5)} \\ & \quad\vdots \\ & + (-1)^{n-1}\cdot f^{(n-1)}\cdot g^{(-n)} \\ & + (-1)^{n}\cdot\int f^{(n)}\cdot g^{(-n)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Hvis $f^{(n)} = 0$ (f.eks. polynomer) så blir

$$\begin{aligned}\int f\cdot g\,\mathrm{d}x = f\cdot g^{(-1)} & \\ & - f^{(1)}\cdot g^{(-2)} \\ & + f^{(2)}\cdot g^{(-3)} \\ & - f^{(3)}\cdot g^{(-4)} \\ & + f^{(4)}\cdot g^{(-5)} \\ & \quad\vdots \\ & + (-1)^{n-1}\cdot f^{(n-1)}\cdot g^{(-n)} + C\end{aligned}$$

Gunnleggende integraler

(1) $$\int 0\,\mathrm{d}x = C$$

(2) $$\int \mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

(3) $$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C$$

(4) $$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

(5) $$\int x^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-n}x^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$$

(6) $$\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + C \quad (n \neq -1)$$

(7) $$\int x^{\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}x = \frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}} + C$$

(8) $$\int x^{-\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}x = \frac{q}{q-p}x^{\frac{q-p}{q}} + C$$

(9) $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

(10) $$\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

(11) $$\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

(12) $$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$

(13) $$\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

(14) $$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

(15) $$\int a^{bx}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{bx}}{b\cdot\ln(a)} + C$$

(16) $$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x) - x + C$$

(17) $$\int \ln|x|\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln|x| - x + C$$

(18) $$\int \log_b(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(b)}\big(x\cdot\ln(x) - x\big) + C$$

(19) $$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

(20) $$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

(21) $$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + C$$

Integraler med hyperbolske funksjoner

(22) $$\int \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(x) + C$$

(23) $$\int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(x) + C$$

(24) $$\int \tanh(x)\,\mathrm{d}x = \ln(\cosh(x)) + C$$

(25) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\tanh(x)} = \ln|\sinh(x)| + C$$

(26) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh(x)} = 2\tan^{-1}(e^x) + C$$

(27) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh(x)} = \ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

(28) $$\int \sinh(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sinh(2x) - \frac{x}{2} + C$$

(29) $$\int \cosh(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sinh(2x) + \frac{x}{2} + C$$

(30) $$\int \tanh(x)^2\,\mathrm{d}x = x - \tanh(x) + C$$

(31) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\tanh(x)^2} = x - \frac{1}{\tanh(x)} + C$$

(32) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh(x)^2} = \tanh(x) + C$$

(33) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh(x)^2} = -\frac{1}{\tanh(x)} + C$$

(34) $$\int \frac{\tanh(x)}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\cosh(x)} + C$$

(35) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh(x)\cdot\tanh(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sinh(x)} + C$$

Integraler med trigonometriske funksjoner

(36) $$\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

(37) $$\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

(38) $$\int \tan(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + C$$

(39) $$\int \sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

(40) $$\int \cos(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

(41) $$\int \tan(x)^2\,\mathrm{d}x = \tan(x) - x + C$$

(42) $$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right| + C$$

(43) $$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{1}{\cos(x)} + \tan(x)\right| + C$$

(44) $$\int \frac{1}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| + C$$

(45) $$\int \frac{1}{\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\tan(x)} + C$$

(46) $$\int \frac{1}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$

(47) $$\int \frac{1}{\tan(x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\tan(x)} - x + C$$

(48) $$\int \frac{\tan(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos(x)} + C$$

(49) $$\int \frac{1}{\sin(x)\cdot\tan(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sin(x)} + C$$

(50) $$\int \left(1 + \tan(x)^2\right)\,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$

(51) $$\int x\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cdot\cos(x) + C$$

(52) $$\int x\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) + x\cdot\sin(x) + C$$

Flere integraler med trigonometriske funksjoner

(53) $$\int \frac{1}{\sin(x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{\tan(x)}\right| - \frac{1}{2\sin(x)\cdot\tan(x)} + C$$

(54) $$\int \frac{1}{\cos(x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos(x)} + \tan(x)\right| + \frac{\tan(x)}{2\cos(x)} + C$$

(55) $$\int \sin(ax)\cdot\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin\big((a-b)\cdot x\big)}{2(a-b)} - \frac{\sin\big((a+b)\cdot x\big)}{2(a+b)} + C \quad (a^2 \neq b^2)$$

(56) $$\int \cos(ax)\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin\big((a-b)\cdot x\big)}{2(a-b)} + \frac{\sin\big((a+b)\cdot x\big)}{2(a+b)} + C \quad (a^2 \neq b^2)$$

(57) $$\int \sin(ax)\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos\big((a-b)\cdot x\big)}{2(a-b)} - \frac{\cos\big((a+b)\cdot x\big)}{2(a+b)} + C \quad (a^2 \neq b^2)$$

(58) $$\int \sin(x)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin(x)^{n-1}\cdot\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2}\,\mathrm{d}x$$

(59) $$\int \cos(x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos(x)^{n-1}\cdot\sin(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos(x)^{n-2}\,\mathrm{d}x$$

(60) $$\int \tan(x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\tan(x)^{n-1} - \int \tan(x)^{n-2}\,\mathrm{d}x \quad (n \neq 1)$$

(61) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan(x)^n} = -\frac{1}{(n-1)\cdot\tan(x)^{n-1}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\tan(x)^{n-2}} \quad (n \neq 1)$$

(62) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)^n} = \frac{\tan(x)}{(n-1)\cdot\cos(x)^{n-2}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)^{n-2}} \quad (n \neq 1)$$

(63) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)^n} = -\frac{1}{(n-1)\cdot\sin(x)^{n-2}\cdot\tan(x)} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)^{n-2}} \quad (n \neq 1)$$

(64) $$\int \sin(x)^n\cdot\cos(x)^m\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin(x)^{n-1}\cdot\cos(x)^{m+1}}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin(x)^{n-2}\cdot\cos(x)^m\,\mathrm{d}x \quad (n \neq -m)$$

(65) $$\int \sin(x)^n\cdot\cos(x)^m\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(x)^{n+1}\cdot\cos(x)^{m-1}}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin(x)^n\cdot\cos(x)^{m-2}\,\mathrm{d}x \quad (m \neq -n)$$

(66) $$\int x^n\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x = -x^n\cdot\cos(x) + n\int x^{n-1}\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

(67) $$\int x^n\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = x^n\cdot\sin(x) - n\int x^{n-1}\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Integraler med $\sqrt{a^2 - x^2}$ $\quad (a > 0,\ |x| < a)$

(68) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

(69) $$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a^2 - x^2} - a\cdot\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$$

(70) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

(71) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

(72) $$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

(73) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

(74) $$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

(75) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$$

(76) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

(77) $$\int (a^2 - x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(5a^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Integraler med $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ $\quad (a > 0)$ $\qquad$ (For $\sqrt{x^2 - a^2}$, så er $x > a > 0$)

(78) $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

(79) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

(80) $$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 + a^2} - a\cdot\ln\left|\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right| + C$$

(81) $$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 - a^2} - a\cdot\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + C$$

(82) $$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2 \pm a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

(83) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

(84) $$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

(85) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a}\sinh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) + C$$

(86) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) + C$$

(87) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2x} + C$$

(88) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$$

(89) $$\int (x^2 \pm a^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2 \pm 5a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Integraler med inverse trigonometriske funksjoner

(90) $$\int \sin^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\sin^{-1}(x) + \sqrt{1 - x^2} + C$$

(91) $$\int \tan^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

(92) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{-1}(x)} = \frac{x}{\cos^{-1}(x)} - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C \quad (x > 1)$$

(93) $$\int x\cdot\sin^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\cdot\sin^{-1}(x) + \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2} + C$$

(94) $$\int x\cdot\tan^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\cdot\tan^{-1}(x) - \frac{x}{2} + C$$

(95) $$\int \frac{x}{\cos^{-1}(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2\cos^{-1}(x)} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1} + C \quad (x > 1)$$

(96) $$\int x^n\cdot\sin^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\sin^{-1}(x) - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x \quad (n \neq -1)$$

(97) $$\int x^n\cdot\tan^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\tan^{-1}(x) - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x \quad (n \neq -1)$$

(98) $$\int \frac{x^n}{\cos^{-1}(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)\cos^{-1}(x)} - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x \quad (n \neq -1,\ x > 1)$$

Integraler med eksponential- og logaritmefunksjoner

(99) $$\int xe^x \, \mathrm{d}x = (x-1)e^x + C$$

(100) $$\int x^n e^x \, \mathrm{d}x = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, \mathrm{d}x + C$$

(101) $$\int x e^{\frac{1}{2}x^2} \, \mathrm{d}x = e^{\frac{1}{2}x^2} + C$$

(102) $$\int x^n \ln(x) \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2} + C \quad (n \neq -1)$$

(103) $$\int x^n \ln(x)^m \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n \ln(x)^{m-1} \, \mathrm{d}x \quad (n \neq -1)$$

(104) $$\int e^{ax} \sin(bx) \, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \left(a \cdot \sin(bx) - b \cdot \cos(bx)\right) + C$$

(105) $$\int e^{ax} \cos(bx) \, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \left(a \cdot \cos(bx) + b \cdot \sin(bx)\right) + C$$

Diverse algebraiske integraler

(106) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a \neq 0)$$

(107) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \quad (a > 0)$$

(108) $$\int \frac{x}{ax+b} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln|ax+b| + C$$

(109) $$\int \frac{x}{(ax+b)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} \left(\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right) + C$$

(110) $$\int x(ax+b)^n \, \mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2} \left(\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1}\right) + C \quad (n \neq -1, -2)$$

(111) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 \pm x^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left(\frac{x}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}}\right) \quad (n \neq -1)$$

(112) $$\int x\sqrt{ax+b} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{15a^2}(3ax-2b)(ax+b)^{3/2} + C$$

(113) $$\int x^n \sqrt{ax+b} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{a \cdot (2n+3)} \left(x^n (ax+b)^{3/2} - nb \int x^{n-1} \sqrt{ax+b} \, dx\right)$$

(114) $$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b} + C$$

(115) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{a \cdot (2n+1)} \left(x^n \sqrt{ax+b} - nb \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}} \, \mathrm{d}x\right)$$

(116) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left|\frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}}\right| + C \quad (b > 0)$$

(117) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}\right) + C \quad (b < 0)$$

(118) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n \sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{b \cdot (n-1)x^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} \quad (n \neq 1)$$

(119) $$\int \sqrt{2ax-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$

(120) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}} \, \mathrm{d}x = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$

(121) $$\int x^n \sqrt{2ax-x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{x^{n-1}(2ax-x^2)^{3/2}}{n+2} + \frac{(2n+1)a}{n+2} \int x^{n-1} \sqrt{2ax-x^2} \, \mathrm{d}x$$

(122) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{2ax-x^2}} \, \mathrm{d}x = -\frac{x^{n-1}}{n} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{(2n-1)a}{n} \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{2ax-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2ax-x^2} + a\cdot\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C \quad (a>0) \tag{123}$$

$$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{(2ax-x^2)^{3/2}}{(3-2n)ax^n} + \frac{n-3}{(2n-3)a}\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^{n-1}}\,\mathrm{d}x \tag{124}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a\cdot(1-2n)x^n} + \frac{n-1}{(2n-1)a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}} \tag{125}$$

$$\int \left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n\mathrm{d}x = \frac{x-a}{n+1}\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n + \frac{na^2}{n+1}\int\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}\mathrm{d}x \quad (n\neq -1) \tag{126}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n} = \frac{x-a}{(n-2)a^2}\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}} \quad (n\neq 2) \tag{127}$$

Noen integraler med absoluttverdi

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\cdot|x| + C \tag{128}$$

$$\int |ax+b|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(ax+b)\cdot|ax+b| + C \tag{129}$$

$$\int |\sin(ax)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\big(2n+(-1)^{n+1}\big)\cdot\cos(ax) + C \quad (n=\lfloor ax/\pi\rfloor) \tag{130}$$

$$\int |\cos(ax)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\big(2n+(-1)^{n}\big)\cdot\sin(ax) + C \quad (n=\lfloor ax/\pi+1/2\rfloor) \tag{131}$$

Register

Algebra $\quad a,b,c,n,x \in \mathbb{R} \qquad i^2=-1$

1. Kvadratsetning:	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
2. Kvadratsetning:	$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
Konjugatsetningen:	$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
Kvadratrotkonjugat:	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$
Komplekskonjugat:	$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$
Andregradslikningen:	$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Fullstendig kvadrat:	$ax^2+bx+c = a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$
	$ax^{2n}+bx^n+c = a\cdot\left(x^n+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

Trigonometriske identiteter $\quad x,a,b \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\sin(x)^2+\cos(x)^2 = 1 \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sec(x) = 1/\cos(x) \qquad \csc(x) = 1/\sin(x) \qquad \cot(x) = 1/\tan(x)$$

$$\sin(x\pm\pi/2) = \pm\cos(x) \qquad \sin(\pm\pi/2-x) = \pm\cos(x)$$
$$\cos(x\pm\pi/2) = \mp\sin(x) \qquad \cos(\pm\pi/2-x) = \pm\sin(x)$$
$$\tan(x\pm\pi/2) = -1/\tan(x) \qquad \tan(\pm\pi/2-x) = 1/\tan(x)$$
$$\sin(x\pm3\pi/2) = \pm\cos(x) \qquad \sin(\pm3\pi/2-x) = \mp\cos(x)$$
$$\cos(x\pm3\pi/2) = \mp\sin(x) \qquad \cos(\pm3\pi/2-x) = \mp\sin(x)$$
$$\tan(x\pm3\pi/2) = -1/\tan(x) \qquad \tan(\pm3\pi/2-x) = 1/\tan(x)$$
$$\sin(x+n\pi) = (-1)^n\sin(x) \qquad \sin(n\pi-x) = (-1)^{n+1}\sin(x)$$
$$\cos(x+n\pi) = (-1)^n\cos(x) \qquad \cos(n\pi-x) = (-1)^n\cos(x)$$
$$\tan(x+n\pi) = \tan(x) \qquad \tan(n\pi-x) = -\tan(x)$$
$$\sin(x+2n\pi) = \sin(x) \qquad \sin(2n\pi-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(x+2n\pi) = \cos(x) \qquad \cos(2n\pi-x) = \cos(x)$$
$$\tan(x+2n\pi) = \tan(x) \qquad \tan(2n\pi-x) = -\tan(x)$$
$$\sin(n\pi) = 0 \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(n\pi) = (-1)^n \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$
$$\tan(n\pi) = 0 \qquad \tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\sin(a\pm b) = \sin(a)\cdot\cos(b)\pm\cos(a)\cdot\sin(b)$$
$$\cos(a\pm b) = \cos(a)\cdot\cos(b)\mp\sin(a)\cdot\sin(b)$$
$$\tan(a\pm b) = \big(\tan(a)\pm\tan(b)\big)/\big(1\mp\tan(a)\cdot\tan(b)\big)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x) \qquad \cos(2x) = 2\cos(x)^2-1$$
$$\cos(2x) = \cos(x)^2-\sin(x)^2 \qquad \cos(2x) = 1-2\sin(x)^2$$

Potenser og røtter $\quad a,b,n,m \in \mathbb{R}^+ \quad k \in \mathbb{Z}^+$

$$a^k = \overbrace{a\cdot a\cdots a}^{k \text{ faktorer}}$$
$$a^n = e^{n\cdot\ln(a)}$$
$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$a^{m+n} = a^m\cdot a^n$$
$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$
$$a^{m\cdot n} = (a^m)^n$$
$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$$

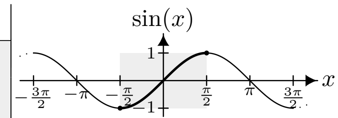
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$0^n = 0$$
$$0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0} = \varnothing$$
$$(-1)^k = +1 \quad (k \text{ partall})$$
$$(-1)^k = -1 \quad (k \text{ oddetall})$$
$$(-a)^k = (-1)^k\cdot a^k$$
$$(-a)^{-k} = \frac{(-1)^k}{a^k}$$
$$(-a)^0 = 1$$
$$0^0 = 1$$

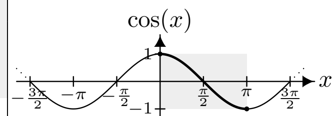
$$a^{1/n} = b > 0 \text{ slik at } b^n = a$$
$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$
$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{1/2}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$$
$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} \quad (n \text{ oddetall})$$
$$\sqrt[n]{-a} \notin \mathbb{R} \quad (n \text{ ikke oddetall})$$
$$\sqrt{a^2\cdot b} = a\cdot\sqrt{b}$$

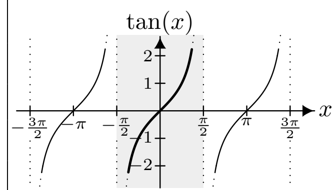
Logaritmer, fakultet $\quad r \in \mathbb{R} \quad b \neq 1, x, y \in \mathbb{R}^+ \quad n,k \in \mathbb{N}$

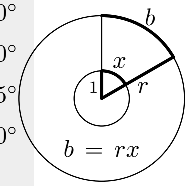
$$\log_b(x) = r \text{ slik at } b^r = x \qquad n! = 1\cdot2\cdot3\cdots n$$
$$\ln(x) = \log_e(x) \qquad 0! = 1$$
$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$
$$\ln(x\cdot y) = \ln(x)+\ln(y) \qquad n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$
$$\ln(x/y) = \ln(x)-\ln(y) \qquad n^{\underline{0}} = 1$$
$$\ln(x^r) = r\cdot\ln(x)$$
$$\ln(e^r) = e^{\ln(r)} = r \qquad e \approx 2.718281828459045$$
$$\ln(e) = 1, \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(0) = \varnothing \qquad \pi \approx 3.141592653589793$$

x	grader	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$x-2\pi$	grader
0	$0°$	0	1	0		
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1		
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$		
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	$\pm\infty$		
$\frac{2\pi}{3}$	$120°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$		
$\frac{3\pi}{4}$	$135°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1		
$\frac{5\pi}{6}$	$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
π	$180°$	0	-1	0		
$\frac{7\pi}{6}$	$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		
$\frac{5\pi}{4}$	$225°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1		
$\frac{4\pi}{3}$	$240°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$		
$\frac{3\pi}{2}$	$270°$	-1	0	$\pm\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	$-90°$
$\frac{5\pi}{3}$	$300°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-60°$
$\frac{7\pi}{4}$	$315°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\pi}{4}$	$-45°$
$\frac{11\pi}{6}$	$330°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-30°$
2π	$360°$	0	1	0	0	$0°$









Derivasjon $\quad$ mhp $x \in \mathbb{R}$ og f,g er funksjoner av x

$$(a\cdot f)' = a\cdot f' \qquad (x^n)' = n\cdot x^{n-1} \qquad \sin(x)' = \cos(x)$$
$$(f+g)' = f'+g' \qquad (e^x)' = e^x \qquad \cos(x)' = -\sin(x)$$
$$(f\cdot g)' = f'\cdot g+f\cdot g' \qquad (a^x)' = a^x\cdot\ln(a) \qquad \tan(x)' = \frac{1}{\cos(x)^2}$$
$$\left(\tfrac{1}{f}\right)' = -\frac{f}{f^2} \qquad \ln(x)' = \frac{1}{x} \quad (x>0) \qquad \sin^{-1}(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\left(\tfrac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2} \qquad \log_b(x)' = \frac{1}{\ln(b)\cdot x} \qquad \cos^{-1}(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$f(g)' = f'(g)\cdot g' \qquad \ln(f)' = \frac{f'}{f} \quad (f>0) \qquad \tan^{-1}(x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Integrasjon $\quad$ mhp $x \in \mathbb{R}$ og f,g er funksjoner av x

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \qquad \int\sin(x)\,dx = -\cos(x)+C$$
$$\int e^x\,dx = e^x+C \qquad \int\cos(x)\,dx = \sin(x)+C$$
$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x+C \qquad \int\tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)|+C$$
$$\int\frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C \qquad \int\frac{1}{\cos(x)^2}\,dx = \tan(x)+C$$
$$\int\ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x)+C \qquad \int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$
$$\int\frac{f'}{f}\,dx = \ln|f|+C \qquad \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}f^{(-1)}(ax+b)+C$$

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = f^{(-1)}\big(g(x)\big) \qquad \big(u \leftrightarrow g(x)\big)$$
$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \qquad \big(u \leftrightarrow g(x)\big)$$

$$\int f\cdot g\,dx = f\cdot g^{(-1)} - \int f^{(1)}\cdot g^{(-1)}\,dx$$
$$\int f\cdot g\,dx = f\cdot g^{(-1)} - f^{(1)}\cdot g^{(-2)} + \int f^{(2)}\cdot g^{(-2)}\,dx$$
$$\int f\cdot g\,dx = f\cdot g^{(-1)} - f^{(1)}\cdot g^{(-2)} + f^{(2)}\cdot g^{(-3)} - f^{(3)}\cdot g^{(-4)} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}\cdot g^{(-n)} + (-1)^n\int f^{(n)}\cdot g^{(-n)}\,dx$$