# FORMELSAMLING FOR MATEMATIKK

Jostein Trondal

## **Algebra** $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ $i^2 = -1$

1. Kvadratsetning: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Kvadratsetning: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Konjugatsetningen: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Kvadratrotkonjugat: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$

Komplekskonjugat: $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

Andregradslikningen: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Fullstendig kvadrat: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

## **Trigonometriske identiteter** $\theta, a, b \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin(\text{-}\theta) = -\sin\theta$ $\sin(\frac{\pi}{2}\text{-}\theta) = \cos\theta$ $\sin(n\pi\text{-}\theta) = (\text{-}1)^{n+1}\sin\theta$

$\cos(\text{-}\theta) = \cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}\text{-}\theta) = \sin\theta$ $\cos(n\pi\text{-}\theta) = (\text{-}1)^{n}\cos\theta$

$\tan(\text{-}\theta) = -\tan\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}\text{-}\theta) = \frac{1}{\tan\theta}$ $\tan(n\pi\text{-}\theta) = -\tan\theta$

$\sin(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos\theta$ $\sin(\theta + n\pi) = (\text{-}1)^n\sin\theta$ $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$

$\cos(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\sin\theta$ $\cos(\theta + n\pi) = (\text{-}1)^n\cos\theta$ $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$

$\tan(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{\tan\theta}$ $\tan(\theta + n\pi) = \tan\theta$ $\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$

$\sin(n\pi) = 0$ $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a \sin b$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$ $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

$\tan(n\pi) = 0$ $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1/2 \cdot (1 - \cos 2\theta)$ $\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1/2 \cdot (1 + \cos 2\theta)$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\sin a \sin b = 1/2 \cdot \cos(a-b) - 1/2 \cdot \cos(a+b)$

$\cos a \cos b = 1/2 \cdot \cos(a-b) + 1/2 \cdot \cos(a+b)$

$\sin a \cos b = 1/2 \cdot \sin(a-b) + 1/2 \cdot \sin(a+b)$

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

## **Potenser og røtter** $a, b, n, m \in \mathbb{R}^+$ $k \in \mathbb{N}$

$a^k = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{k \text{ faktorer}}$

$a^n = e^{n \cdot \ln a}$

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$

$a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$0^n = 0$

$0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0} = \emptyset$

$(\text{-}1)^k = +1$ ($k$ partall)

$(\text{-}1)^k = \text{-}1$ ($k$ oddetall)

$(\text{-}a)^k = (\text{-}1)^k \cdot a^k$

$(\text{-}a)^{-k} = \frac{(\text{-}1)^k}{a^k}$

$(\text{-}a)^0 = 1$

$0^0 = 1$ eller $\emptyset$

$a^{1/n} = x > 0$ slik at $x^n = a$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{1/2}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{\text{-}a} = \text{-}\sqrt[n]{a}$ ($n$ oddetall)

$\sqrt[n]{\text{-}a} \notin \mathbb{R}$ ($n$ ikke oddetall)

$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$

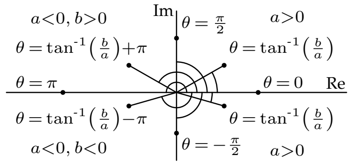
## **Komplekse tall** $n, k \in \mathbb{Z}$ $a, b, r, \theta, \omega \in \mathbb{R}$ $z \in \mathbb{C}$ $i^2 = -1$

$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$ $z = a + bi$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$ $\overline{z} = a - bi$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\mathrm{Arg}(z) = \theta \in \langle -\pi, \pi] :$



$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$

$\mathrm{Re}(z) = a = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

$\mathrm{Im}(z) = b = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\mathrm{Arg}_{2\pi}(z) = \mathrm{Arg}(z) + [\mathrm{Arg}(z) < 0] \cdot 2\pi = \theta \in [0, 2\pi\rangle$

$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2n\pi$ $r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{(i\theta_1 + \theta_2)}$

$e^z = \exp(z) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $(r_1 e^{i\theta_1})/(r_2 e^{i\theta_2}) = (r_1/r_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

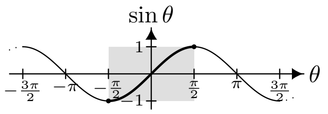
$\log(z) = (1/2)\ln(|z|^2) + i\arg(z)$ $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2$

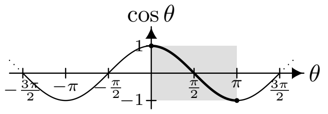
$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$

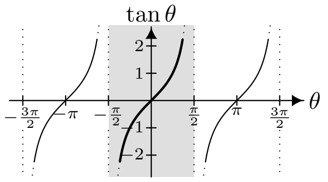
$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ $z^\omega = \exp(\omega \log z)$

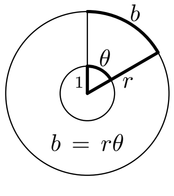
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$, $k \in 0 \ldots n\text{-}1$

| $\theta$ | grader | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ | $\tan\theta$ | $\theta$-$2\pi$ | grader |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0°$ | $0$ | $1$ | $0$ | | |
| $\frac{\pi}{6}$ | $30°$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | |
| $\frac{\pi}{4}$ | $45°$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | | |
| $\frac{\pi}{3}$ | $60°$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | $90°$ | $1$ | $0$ | $\pm\infty$ | | |
| $\frac{2\pi}{3}$ | $120°$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\text{-}\frac{1}{2}$ | $\text{-}\sqrt{3}$ | | |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $135°$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\text{-}\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\text{-}1$ | | |
| $\frac{5\pi}{6}$ | $150°$ | $\frac{1}{2}$ | $\text{-}\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\text{-}\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | |
| $\pi$ | $180°$ | $0$ | $\text{-}1$ | $0$ | | |
| $\frac{7\pi}{6}$ | $210°$ | $\text{-}\frac{1}{2}$ | $\text{-}\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | |
| $\frac{5\pi}{4}$ | $225°$ | $\text{-}\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\text{-}\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | | |
| $\frac{4\pi}{3}$ | $240°$ | $\text{-}\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\text{-}\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | | |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $270°$ | $\text{-}1$ | $0$ | $\pm\infty$ | $\text{-}\frac{\pi}{2}$ | $\text{-}90°$ |
| $\frac{5\pi}{3}$ | $300°$ | $\text{-}\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\text{-}\sqrt{3}$ | $\text{-}\frac{\pi}{3}$ | $\text{-}60°$ |
| $\frac{7\pi}{4}$ | $315°$ | $\text{-}\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\text{-}1$ | $\text{-}\frac{\pi}{4}$ | $\text{-}45°$ |
| $\frac{11\pi}{6}$ | $330°$ | $\text{-}\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\text{-}\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\text{-}\frac{\pi}{6}$ | $\text{-}30°$ |
| $2\pi$ | $360°$ | $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0°$ |









## **Derivasjon** mhp $x$ der $x, a \in \mathbb{R}$ og $u, v$ er funksjoner av $x$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(e^x)' = e^x$ $(\sin x)' = \cos x$

$(a \cdot u)' = a \cdot u'$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\cos x)' = \text{-}\sin x$

$(u+v)' = u'+v'$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(uv)' = u'v+uv'$ $(\log_b x)' = \frac{1}{x \ln b}$ $(\sin^{\text{-}1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(u(v))' = u'(v)v'$ $(\cos^{\text{-}1} x)' = \text{-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(u^v)' = u^v\left(v' \ln u + \frac{v}{u}u'\right)$ $(\tan^{\text{-}1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

## **Integrasjon**

$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$

$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\frac{1}{\tan x} + c$

$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$ $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$ $\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + c, \quad u > 0$

$\int te^{\frac{1}{2}t^2} \, dt = e^{\frac{1}{2}t^2} + c$ $\int fg = fg^{(\text{-}1)} - \int f^{(1)}g^{(\text{-}1)}$

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$$

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du \quad \text{med } u = g(x)$$

$$\int e^{at}\cos bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\cos bt + b\sin bt) + c$$

$$\int e^{at}\sin bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\sin bt - b\cos bt) + c$$

## **Ymse** $x \in \mathbb{R}$ $b \neq 1, u, v, y \in \mathbb{R}^+$ $n, k \in \mathbb{N}_0$

$\log_b y = x$ slik at $b^x = y$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

$\ln y = \log_e y$ $0! = 1$

$\log_b y = \frac{\ln y}{\ln b}$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v$ $n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$

$\ln(u/v) = \ln u - \ln v$ $n^{\underline{0}} = 1$

$\ln(u^v) = v \cdot \ln u$

Iversonklammer:

$[P] = \begin{cases} 1 & \text{hvis } P \text{ er sant} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

$\ln e^x = e^{\ln x} = x$

$\ln e = 1$

$\ln 1 = 0$ $\pi \approx 3.14159265358979323846264$

$\ln 0 = \emptyset$ $e \approx 2.71828182845904523536029$

# Forord

Dette heftet er laget på grunnlag av fire skreddersydde formelsamlinger til forskjellige fag ved UiA Grimstad i løpet av perioden 2008-2012. Disse formelsamlingene er fritt tilgjengelige på `trondal.com`

Innholdet bærer preg av denne sammenvevingen; Det er noen overlappende temaer, og noen ulike måter å presentere stoffet på.

En del av stoffet er oversettelser av definisjoner og teoremer fra Wikipedia og annen litteratur. Kommentarer og rettelser er velkomne.

Tusen takk til Svein Olav Nyberg, Hans Herlof Grelland, Torgeir Attestog, Bjørn Øyvind Halvorsen, Asbjørn Sandnes og Leon Marbl for innspill og rettelser så langt!

Dette er versjon 1, og ble gitt ut 16. april 2013.

Info om trykkfeil vil fortløpende bli publisert her: `trondal.com/fs`

# Referanser

George B. Thomas, J. (2005). *Thomas' Calculus* (M. Weir, J. Hass & F.R. Giordano, red.). Pearson Addison Wesley.

Goldstein, H., Charles P. Poole, J. & Safko, J.L. (2000). *Classical mechanics* (3rd utg.). Addison Wesley.

Gulliksen, T. (1998). *Matematikk i praksis.* Universitetsforlaget.

Haugan, J. (2007). *Formler og tabeller.* NKI Forlaget.

Kohler, W. & Johnson, L. (2006). *Elementary differential equations.* Pearson Addison Wesley.

Lay, D.C. (2006). *Linear algebra and its applications.* Pearson Addison Wesley.

Utdanningsdirektoratet. (2001). *Formelsamling i matematikk.* Gyldendal.

# Innhold

**1 Kalkulus 3**

**2 Lineær algebra og differensiallikninger 10**

**3 Matrisetransformasjoner 15**

**4 Anvendt matematikk 18**

# 1 Kalkulus

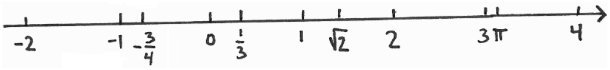
## 1.1 Mengder

En **mengde** er en samling av **elementer**. Følgende notasjon kan brukes, der $S$ og $T$ er mengder:

| | |
|---|---|
| $a \in S$ | $a$ er element i $S$ |
| $a \notin S$ | $a$ er ikke element i $S$ |
| $S \cup T$ | Unionen av $S$ og $T$ (inneholder alle elementer i $S$ og $T$ til sammen) |
| $S \cap T$ | Snittet av $S$ og $T$ (inneholder alle elementer felles for $S$ og $T$) |
| $\emptyset$ | Den tomme mengden (inneholder ingen elementer) |
| $S \subseteq T$ | $S$ er en **delmengde** av $T$ ($T$ inneholder minst alle elementene til $S$) |

## 1.2 Tall

Tall kan beskrives som punkter på en tallinje:



Tall kan også defineres som mengdene $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ slik:

$$\begin{aligned}
\text{Naturlige tall } \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\text{Hele tall } \mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\
\text{Rasjonale tall } \mathbb{Q} &= \frac{a}{b} \quad \text{der } a, b \in \mathbb{Z} \text{ og } b \neq 0 \\
\text{Reelle tall } \mathbb{R} &= \text{Alle tall på tallinjen} \\
\text{Irrasjonale tall} &= \text{Reelle tall som ikke er rasjonale}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

## 1.3 Intervaller

En delmengde av tallinja kalles et **intervall** om den inneholder minst to tall og inneholder alle reelle tall mellom to vilkårlige elementer i delmengden. Et linjesegment av tallinja er et **endelig intervall**. Et ubegrenset område av tallinja er et **uendelig intervall**. Et intervall er **lukket** om det inneholder begge **endepunktene**, **åpent** om det ikke inneholder noen endepunkter og **halvåpent** om det inneholder ett av endepunktene men ikke det andre. Punkter i intervallet som ikke er endepunkter kalles **indre punkter**. Vi har følgende typer intervaller:

| Notasjon | Mengde | Type |
|---|---|---|
| $\langle a, b\rangle$ | $\{x \mid a < x < b\}$ | Åpent, endelig |
| $[a, b]$ | $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ | Lukket, endelig |
| $[a, b\rangle$ | $\{x \mid a \leq x < b\}$ | Halvåpent, endelig |
| $\langle a, b]$ | $\{x \mid a < x \leq b\}$ | Halvåpent, endelig |
| $\langle a, \infty\rangle$ | $\{x \mid x > a\}$ | Åpent, uendelig |
| $[a, \infty\rangle$ | $\{x \mid x \geq a\}$ | Lukket, uendelig |
| $\langle -\infty, b\rangle$ | $\{x \mid x < b\}$ | Åpent, uendelig |
| $\langle -\infty, b]$ | $\{x \mid x \leq b\}$ | Lukket, uendelig |
| $\langle -\infty, \infty\rangle$ | $\mathbb{R}$ | Åpent, lukket, uendelig |

## 1.4 Ulikheter

Hvis $a, b, c \in \mathbb{R}$ så har vi:

$$\begin{aligned}
a < b \quad &\Rightarrow \quad a + c < b + c \\
a < b \quad &\Rightarrow \quad a - c < b - c \\
a < b \text{ og } c > 0 \quad &\Rightarrow \quad ac < bc \\
a < b \text{ og } c < 0 \quad &\Rightarrow \quad ac > bc \\
a < b \quad &\Rightarrow \quad -a > -b \\
a > 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{a} > 0 \\
a, b > 0 \text{ eller } a, b < 0 \quad &\Rightarrow \quad a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

## 1.5 Absoluttverdi

Hvis $a, b, x \in \mathbb{R}$ så har vi:

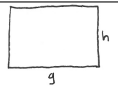
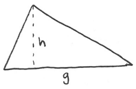
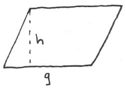
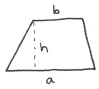
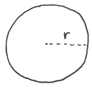
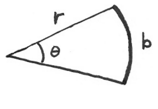
$$|x| = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
|-a| &= |a| \\
|-a| &\neq -|a| \\
|ab| &= |a||b| \\
\left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|} \\
|a + b| &\leq |a| + |b| \qquad \text{(trekantulikheten)}
\end{aligned}$$

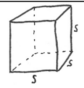
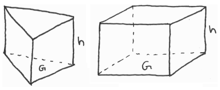
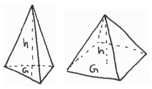
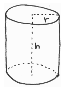
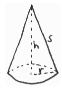
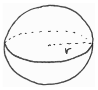
Hvis $a > 0$ har vi:

$$\begin{aligned}
|x| = a \quad &\Leftrightarrow \quad x = \pm a \\
|x| < a \quad &\Leftrightarrow \quad -a < x < a \\
|x| > a \quad &\Leftrightarrow \quad x > a \text{ eller } x < -a \\
|x| \leq a \quad &\Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a \\
|x| \geq a \quad &\Leftrightarrow \quad x \geq a \text{ eller } x \leq -a
\end{aligned}$$

## 1.6 Geometriske figurer i planet

| Figur | Areal | | Omkrets |
|---|---|---|---|
| Rektangel | $gh$ |  | $2(g + h)$ |
| Trekant | $\frac{gh}{2}$ |  | |
| Parallellogram | $gh$ |  | |
| Trapes | $\frac{(a+b)h}{2}$ |  | |
| Sirkel | $\pi r^2$ |  | $2\pi r$ |
| Sektor | $\frac{br}{2} = \pi r^2\theta$ |  | $b = 2\pi r\theta$ |

## 1.7 Geometriske figurer i rommet

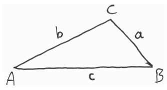
| Figur | Volum | | Overflate |
|---|---|---|---|
| Kube | $s^3$ |  | $6s^2$ |
| Prisme | $Gh$ |  | |
| Pyramide | $\frac{Gh}{3}$ |  | |
| Sylinder | $\pi r^2 h$ |  | $2\pi r(r+h)$ |
| Kjegle | $\frac{\pi r^2 h}{3}$ |  | $\pi r(r+s)$ |
| Kule | $\frac{4\pi r^3}{3}$ |  | $4\pi r^2$ |

**For vilkårlige trekanter i planet gjelder**

Areal $= \frac{1}{2}bc\sin A$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

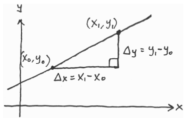
$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$



## 1.8 Linjer i planet

Stigningstallet $m$ til en ikkevertikal linje gjennom punktene $(x_0, y_0)$ og $(x_1, y_1)$ er definert som

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



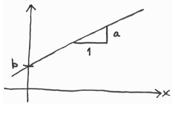
En linje med stigningstall $m$ som går gjennom punktet $(x_1, y_1)$ kan beskrives med likningen

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

En horisontal linje gjennom punktet $(x_1, y_1)$ kan derfor beskrives med likningen $y = y_1$. En vertikal linje gjennom punktet $(x_1, y_1)$ kan beskrives med likningen $x = x_1$.

En linje med stigningstall $m$ og konstantledd $b$ kan beskrives med likningen

$$y = mx + b$$



Alle linjer kan skrives på normalformen

$$Ax + By = C$$

der $A$ og $B$ ikke begge er lik null.

Hvis to ikke-vertikale linjer $L_1$ og $L_2$ står vinkelrett på hverandre, så vil deres stigningstall $m_1$ og $m_2$ tilfredsstille likningen $m_1 m_2 = -1$, dvs:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \qquad \text{og} \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Avstanden mellom punktene $(x_0, y_0)$ og $(x_1, y_1)$ er

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

## 1.9 Parabler

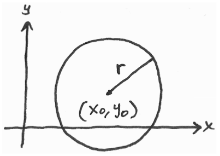
Grafen til likningen $y = ax^2 + bx + c$ der $a \neq 0$ er en parabel som er åpen i toppen når $a > 0$ og åpen i bunnen når $a < 0$. Parabelens akse er linjen

$$x = -\frac{b}{2a}$$

## 1.10 Sirkel

En sirkel med radius $r$ er mengden av alle punktene hvis avstanden fra et sentrum $(x_0, y_0)$ er lik $a$. Dette kan beskrives med likningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



## 1.11 Andregradslikningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hvis $x = x_0$ og $x = x_1$ er løsninger av $ax^2 + bx + c = 0$, så har vi følgende:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$$

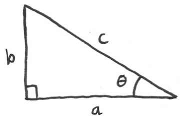
$$x_0 + x_1 = -\frac{b}{a}$$

$$x_0 \cdot x_1 = \frac{c}{a}$$

## 1.12 Pytagoras' setning

I en rettvinklet trekant med katetlengder $a$ og $b$ og hypotenuslengde $c$ så har vi

$$a^2 + b^2 = c^2$$



## 1.13 Funksjoner

En funksjon fra en mengde $D$ til en mengde $Y$ er en regel som tilordner ett (unikt) element $f(x) \in Y$ til hvert element $x \in D$. Mengden $D$ med alle mulige inputverdier kalles **definisjonsmengden** til funksjonen. Mengden av alle verdiene til $f(x)$ når $x$ varierer gjennom hele $D$ kalles **verdimengden** til funksjonen.

## 1.14 Polynomer

En funksjon $p(x)$ er et **polynom** hvis

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (og kalles koeffisientene) til polynomet. Alle polynomer har definisjonemengde $\langle -\infty, \infty \rangle$. $n$ kalles **graden** av polynomet.

## 1.15 Rasjonale funksjoner

En rasjonal funksjon er et forhold mellom to polynomer:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

der $p$ og $q$ er polynomer. Definisjonsmengden til en rasjonal funksjon er mengden av alle $x \in \mathbb{R}$ der $q(x) \neq 0$.

## 1.16 Proporsjonalitet

To variable $x$ og $y$ er proporsjonale til hverandre hvis den ene alltid er en konstant multippel av den andre, dvs:

$$y = kx$$

for en eller annen konstant $k \neq 0$.

## 1.17 Sammensatte funksjoner

Hvis $f$ og $g$ er funksjoner, så er den sammensatte funksjonen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Definisjonsmengden til $f \circ g$ består av tallene $x$ i definisjonsmengden til $g$ der $g(x)$ ligger i definisjonsmengden til $f$.

## 1.18 Flytting/modifisering av grafer

En graf til en funksjon $f(x)$ kan flyttes, strekkes og speiles ved å legge til eller gange med en konstant $k$ på forskjellige måter:

Hvis $k > 0$ så har vi:

| | |
|---|---|
| $f(x) + k$ | Flytter grafen opp lengden $k$ |
| $f(x) - k$ | Flytter grafen ned lengden $k$ |
| $f(x + k)$ | Flytter grafen lengden $k$ mot venstre |
| $f(x - k)$ | Flytter grafen lengden $k$ mot høyre |

Hvis $k > 1$ så har vi:

| | |
|---|---|
| $kf(x)$ | Strekker grafen vertikalt med faktoren $k$ |
| $\frac{1}{k}f(x)$ | Trykker grafen vertikalt med faktoren $k$ |
| $f(kx)$ | Trykker grafen horisontalt med faktoren $k$ |
| $f(x/k)$ | Strekker grafen horisontalt med faktoren $k$ |

Hvis $k = -1$ så har vi:

| | |
|---|---|
| $kf(x) = -f(x)$ | Speiler grafen gjennom $x$-aksen |
| $f(kx) = f(-x)$ | Speiler grafen gjennom $y$-aksen |

## 1.19 Jevne og odde funksjoner

En funksjon $y = f(x)$ er en

$$\text{jevn funksjon av } x \text{ hvis } f(-x) = f(x),$$
$$\text{odde funksjon av } x \text{ hvis } f(-x) = -f(x),$$

for hver $x$ i funksjonens definisjonsmengde. Jevne funksjoner er symmetriske om $y$-aksen. Odde funksjoner er symmetriske om origo.

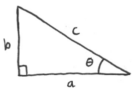
## 1.20 Trigonometri

En vinkel $n^\circ$ i grader kan regnes om til en vinkel $\theta$ i radianer med formelen

$$\theta = \frac{n^\circ}{180^\circ}\pi$$

De triginometriske funksjonene relateres til sidelengdene i en rettvinklet trekant på følgende måte:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \tfrac{b}{c} & \csc\theta &= \tfrac{1}{\sin\theta} = \tfrac{c}{b} \\ \cos\theta &= \tfrac{a}{c} & \sec\theta &= \tfrac{1}{\cos\theta} = \tfrac{c}{a} \\ \tfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta &= \tfrac{b}{a} & \cot\theta &= \tfrac{1}{\tan\theta} = \tfrac{a}{b} \end{aligned}$$



## 1.21 Harmoniske svingninger

kan modelleres med funksjonen

$$\begin{aligned} f(x) &= a\sin cx + b\cos cx + d \\ &= A\sin(cx + \varphi) + d \end{aligned}$$

Periode: $\frac{2\pi}{c}$ Likevektslinje: $y = d$

Amplitude: $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

## 1.22 Grenseverdier

Hvis $L, M, c, k \in \mathbb{R}$ og

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{og} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \text{ så}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) &= L + M \\ \lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) &= L - M \\ \lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) &= L \cdot M \\ \lim_{x\to c}(k \cdot f(x)) &= k \cdot L \\ \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{L}{M}, \quad M \neq 0 \end{aligned}$$

Hvis $r, s \in \mathbb{N}$, ikke har noen felles faktor og $s \neq 0$, så

$$\lim_{x\to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

gitt at $L^{r/s} \in \mathbb{R}$. Hvis $s$ er et partall, antar vi $L > 0$.

Hvis $\lim_{x\to c} \ln f(x) = L$, da er

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} e^{\ln f(x)} = e^L$$

Merk at disse reglene også er gyldige når $c = \pm\infty$.

### Grenseverdien til polynomer

Hvis $p(x)$ er et polynom, så er

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

### Grenseverdien til rasjonale funksjoner

Hvis $p(x)$ og $q(x)$ er polynomer og $q(c) \neq 0$, så er

$$\lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$$

### Sandwichteoremet

Anta at $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for alle $x$ i et åpent intervall som inneholder $c$, utenom muligens ved $x = c$. Anta i tillegg at

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L.$$

Da vil også

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

### Venstre og høyre grenseverdier

En funksjon $f(x)$ har en grenseverdi når $x$ går mot $c$ hvis og bare hvis den har venstre og høyre grenseverdier der og disse grenseverdiene er like:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to c^-} f(x) = L \text{ og } \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

### Horisontal asymptote

En linje $y = b$ er en **horisontal asymptote** av grafen til en funksjon $y = f(x)$ hvis enten

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

### Skråasymptote

Hvis graden til telleren i en rasjonal funksjon $f(x)$ er en høyere enn graden til nevneren så har grafen til funksjonen en **skråasymptote**. Ved å dele telleren på nevneren ved polynomdivisjon får vi uttrykt den rasjonale funksjonen som en lineær funksjon av $x$ pluss et restledd med $x$ i nevneren. Den lineære delen er funksjonen for skråasymptoten.

### Vertikal asymptote

En linje $x = a$ er en **vertikal asymptote** av grafen til en funksjon $y = f(x)$ hvis enten

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

### Noen vanlige grenseverdier

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ i radianer})$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (\text{for alle } x)$$

## 1.23 Kontinuitet

En funksjon $f(x)$ er **kontinuerlig** ved $x = c$ hvis og bare hvis følgende tre krav er oppfyllt:

**1.** $f(c)$ finnes ($c$ er i definisjonsmengden til $f$)
**2.** $\lim_{x\to c} f(x)$ finnes ($f$ har en grense når $x \to c$)
**3.** $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (grenseverdien er lik $f(c)$)

### Kontinuerlig funksjon

En funksjon er kontinuerlig på et intervall hvis og bare hvis den er kontinuerlig på alle punktene i intervallet. En **kontinuerlig funksjon** er en funksjon som er kontinuerlig på alle punktene i funksjonens definisjonsmengde. En funksjon trenger ikke være kontinuerlig på alle intervaller. F.eks. $y = 1/x$ er ikke kontinuerlig i intervallet $[-1, 1]$, men er kontinuerlig i definisjonsmengden $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

### Egenskaper til kontinuerlige funksjoner

Hvis funksjonene $f$ og $g$ er kontinuerlige ved $x = c$, da er følgende kombinasjoner også kontinuerlige ved $x = c$:

| | |
|---|---|
| Summer | $f + g$ |
| Differanser | $f - g$ |
| Produkter | $f \cdot g$ |
| Konstante multipler | $k \cdot f$, for alle tall $k$ |
| Kvotienter | $f/g$, gitt at $g(c) \neq 0$ |
| Potenser | $f^{r/s}$, gitt at $f^{r/s}$ er definert på et åpent intervall som inneholder $c$ og $r, s \in \mathbb{N}$ |
| Sammensatte funksjoner | $f \circ g = f(g(x))$ |

### Skjæringssetningen (Intermediate value theorem)

En funksjon $y = f(x)$ som er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$ antar alle verdier mellom $f(a)$ og $f(b)$. Dvs at hvis $y_0$ er en hvilken som helst verdi mellom $f(a)$ og $f(b)$, så er $y_0 = f(c)$ for en eller annen $c \in [a, b]$.

## 1.24 Stigningstallet til en kurve på et punkt

**Stigningstallet til en kurve** $y = f(x)$ på punktet $P(x_0, f(x_0))$ er tallet

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (\text{gitt at denne finnes})$$

Tangenten til kurven ved $P$ er linjen gjennom $P$ med dette stigningstallet.

## 1.25 Derivasjon

Den **deriverte** til funksjonen $f(x)$ med hensyn på variabelen $x$ er funksjonen $f'$ hvis verdi ved $x$ er

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

gitt at denne grenseverdien finnes. Det er mange måter å skrive den deriverte på. Her er noen vanlige alternativer:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

### Deriverbarhet impliserer kontinuitet

Hvis $f$ er deriverbar ved $x = c$ så betyr det at $f$ også er kontiunerlig ved $x = c$ (men ikke nødvendigvis motsatt).

### Darboux' teorem

Hvis $a$ og $b$ er to vilkårlige punkter i et intervall der $f$ er deriverbar, så vil $f'$ anta alle verdier mellom $f'(a)$ og $f'(b)$.

## 1.26 Derivert som endringshastighet

**Øyeblikkelig endringshastighet** til $f$ med hensyn på $x$ ved $x_0$ er den deriverte til $f$ ved $x_0$, $f'(x_0)$. Hvis da $s = f(t)$ er funksjonen for posisjonen $s$ med hensyn på tiden $t$, så har vi følgende:

|  |  |
|---|---|
| $s(t) = f(t)$ | posisjon |
| $v(t) = s'(t)$ | fart |
| $a(t) = v'(t) = s''(t)$ | akselerasjon |
| $j(t) = a'(t) = v''(t) = s^{(3)}(t)$ | rykk |

## 1.27 Analyse av funksjoner med derivasjon

### Ekstremverdier

La $f$ være en funksjon med definisjonsmengde $D$.
Da har $f$ en **global maksimum**sverdi på $D$ ved et punkt $c$ hvis

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{for alle } x \text{ i } D$$

og en **global minimum**sverdi på $D$ ved $c$ hvis

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{for alle } x \text{ i } D.$$

Hvis $f$ er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$, da vil $f$ ha både en absolutt maksimumsverdi $M$ og en absolutt minimumsverdi $m$ i $[a, b]$. Dvs, det finnes to tall $x_1$ og $x_2$ i $[a, b]$ der $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ og $m \leq f(x) \leq M$ for alle andre $x$-verdier i $[a, b]$.

### Lokale maks og min

En funksjon $f$ har en lokal maksimumsverdi ved et indre punkt $c$ i definisjonsmengden hvis $f(x) \leq f(c)$ for alle $x$ i et åpent intervall som inneholder $c$.

En funksjon $f$ har en lokal minimumsverdi ved et indre punkt $c$ i definisjonsmengden hvis $f(x) \geq f(c)$ for alle $x$ i et åpent intervall som inneholder $c$.

Globale ekstremverdier er også lokale ekstremverdier, men ikke nødvendigvis motsatt.

### Førstederivert testen for lokale ekstremverdier

Hvis $f$ har en lokal maksimums- eller minimumsverdi ved et indre punkt $c$ i definisjonsmengden, og $f'$ er definert ved $c$, så er

$$f'(c) = 0$$

### Kritisk punkt

Et indre punkt i definisjonsmengden til en funksjon $f$ der $f'$ er null eller udefinert kalles et **kritisk punkt** på $f$.

Globale ekstrempunkt på et endelig lukket intervall til en kontinuerlig funksjon $f$ er den største og den minste verdien av $f$ ved alle kritiske punkter og endepunkter.

### Rolles teorem

Anta at $y = f(x)$ er kontinuerlig på alle punkter i det lukkede intervallet $[a, b]$ og deriverbar på alle punkter i det åpne intervallet $(a, b)$. Hvis

$$f(a) = f(b),$$

da finnes det minst ett tall $c$ i $(a, b)$ hvor

$$f'(c) = 0$$

### Middelverditeoremet (Mean Value Theorem)

Anta at $y = f(x)$ er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$ og deriverbar på alle punkter i det åpne intervallet $(a, b)$. Da finnes det minst et punkt $c$ i $(a, b)$ hvor

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

### Funksjoner med null som derivert er konstante

Hvis $f'(x) = 0$ ved alle punkter $x$ i et åpent intervall $(a, b)$, da er $f(x) = C$ for alle $x \in (a, b)$, der $C$ er en konstant.

### Funksjoner med samme derivert avviker med en konst.

Hvis $f'(x) = g'(x)$ for alle punkter $x$ i et åpent intervall $(a, b)$, da finnes det en konstant $C$ slik at $f(x) = g(x) + C$ for alle $x \in (a, b)$. Dvs, $f - g$ er en konstant på $(a, b)$.

### Økende, minkende og monotone funksjoner

La $f$ være en funksjon definert på et intervall $I$ og la $x_1$ og $x_2$ være to vilkårlige punkter i $I$. Da har vi:

1. Hvis $f(x_1) < f(x_2)$ når $x_1 < x_2$,
   så er $f$ **økende** på $I$.
2. Hvis $f(x_1) > f(x_2)$ når $x_1 < x_2$,
   så er $f$ **minkende** på $I$.

En funksjon som enten er økende eller minkende på $I$ kalles **monoton** på $I$.

### Førstederivert testen for monotone funksjoner

Anta at $f$ er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på $(a, b)$.

Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$, da er $f$ økende på $[a, b]$

Hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$, da er $f$ minkende på $[a, b]$

### Førstederivert testen for lokale ekstremverdier

Anta at $c$ er et kritisk punkt på en kontinuerlig funksjon $f$, og at $f$ er deriverbar på alle punkter i et intervall som inneholder $c$, men ikke nødvendigvis ved $c$. Hvis det viser seg at, når man beveger seg forbi $c$ fra venstre mot høyre på tallinjen, og

1. hvis $f'$ går fra negativ til positiv ved $c$, da har $f$ lokalt minimum ved $c$;
2. hvis $f'$ går fra positiv til negativ ved $c$, da har $f$ lokalt maksimum ved $c$;
3. hvis $f'$ ikke forandrer fortegn ved $c$, da har ikke $f$ lokal ekstremverdi ved $c$.

### Konkav opp, konkav ned

Grafen til en deriverbar funksjon $y = f(x)$ er på et åpent intervall $I$

1. **konkav opp** hvis $f'$ er økende på $I$
2. **konkav ned** hvis $f'$ er minkende på $I$.

### Andrederivert testen for konkavitet

La $y = f(x)$ være dobbelt deriverbar på et intervall $I$

Hvis $f'' > 0$ på $I$, da er grafen til $f$ over $I$ konkav opp.

Hvis $f'' < 0$ på $I$, da er grafen til $f$ over $I$ konkav ned.

### Vendepunkt

Et punkt der grafen til en funksjon kan ha en tangent og der konkaviteten endres, kalles et **vendepunkt**.

### Andrederivert testen for lokale ekstemverdier

Anta at $f''$ er kontinuerlig på et åpent intervall som inneholder $x = c$.

**1.** Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, da har $f$ lokalt maksimum ved $x = c$
**2.** Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, da har $f$ lokalt minimum ved $x = c$
**3.** Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) = 0$, da feiler testen. Funksjonen $f$ kan da enten ha lokalt maks, lokalt min, eller ingen av delene.

### L'Hôpitals regel

Anta at $f(a) = g(a) = 0$, og at $f$ og $g$ er deriverbare på et åpent intervall $I$ som inneholder $a$, og at $g'(x) \neq 0$ på $I$ hvis $x \neq a$. Da har vi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

hvis grenseverdien til høyre finnes. Det samme gjelder om $f(x) \to \pm\infty$ og $g(x) \to \pm\infty$ når $x \to a$. Vi kan også ha $a = \pm\infty$ eller $x \to a^+$ eller $x \to a^-$.

## 1.28 Integrasjon

### Antideriverte

En funksjon $F$ er en **antiderivert** av $f$ på et intervall $I$ hvis $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in I$. Hvis $F$ er en antiderivert av $f$ på et intervall $I$, da er den mest generelle antideriverte av $f$ på $I$

$$F(x) + C$$

hvor $C$ er en vilkårlig konstant.

### Ubestemt integral, integrand

Mengden av alle antideriverte av $f$ er det **ubestemte integralet** av $f$ med hensyn på $x$, og blir skrevet slik:

$$\int f(x)\,dx$$

Symbolet $\int$ er et **integraltegn**. Funksjonen $f$ er **integranden** til integralet, og $x$ er **integrasjonsvariabelen**.

### Bestemt integral

Hvis en funksjon $y = f(x)$ er ikkenegativ og integrerbar over et lukket intervall $[a, b]$, da er arealet mellom kurven $y = f(x)$ og $x$-aksen over $[a, b]$ integralet av $f$ fra $a$ til $b$,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

### Regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)\,dx$$

### Gjennomsnittsverdien til en funksjon

Hvis $f$ er integrerbar på $[a, b]$, da er gjennomsnittsverdien til $f$ på $[a, b]$ lik

$$gj(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

### Middelverditeoremet for bestemte integraler

Hvis $f$ er kontinuerlig på $[a, b]$, da finnes det et punkt $c$ i $[a, b]$ hvor

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

### Kalkulusens fundamentalteorem

Hvis $f$ er kontinuerlig på $[a, b]$, da er $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på $\langle a, b\rangle$, og dens deriverte er $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Hvis $f$ er kontinuerlig på alle punkter i $[a, b]$, og $F$ er en vilkårlig antiderivert av $f$ på $[a, b]$, da har vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

### Subtitusjonsregelen for ubestemte integral

Hvis $u = g(x)$ er en deriverbar funksjon hvis verdimengde er et intervall $I$ og $f$ er kontinuerlig på $I$, da har vi

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

### Subtitusjonsregelen for bestemte integral

Hvis $g'$ er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ og $f$ er kontinuerlig på verdimengen til $g$, da har vi

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

### Spesialtilfeller når $f$ er jevn eller odde

Hvis $f$ er kontinuerlig på intervallet $[-a, a]$, da:

$$\text{Hvis } f \text{ er jevn, da er } \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$
$$\text{Hvis } f \text{ er odde, da er } \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$

### Arealet mellom kurver

Hvis $f$ og $g$ er kontinuerlige og $f(x) \geq g(x)$ i $[a, b]$, da er arealet av området mellom kurvene $y = f(x)$ og $y = g(x)$ fra $a$ til $b$ integralet av $(f - g)$ fra $a$ til $b$:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

## 1.29 Bestemte integralers anvendelser

### Volum

Volumet av et legeme med et kjent integrerbart tversnittareal $A(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ er integralet av $A$ fra $a$ til $b$:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

### Volum med skivemetoden

Rotasjon av **y**(x) om akse || **x**-akse:

$V = \pi \int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2\right]\, dx$

Rotasjon av **x**(y) om akse || **y**-akse:

$V = \pi \int_a^b \left[(R(y))^2 - (r(y))^2\right]\, dy$

### Volum med sylinderskallmetoden

Rotasjon av **y**(x) om akse || **y**-akse:

$V = 2\pi \int_a^b \left(\begin{smallmatrix}\text{skall}\\ \text{radius}\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}\text{skall}\\ \text{høyde}\end{smallmatrix}\right)\, dx$

Rotasjon av **x**(y) om akse || **x**-akse:

$V = 2\pi \int_a^b \left(\begin{smallmatrix}\text{skall}\\ \text{radius}\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}\text{skall}\\ \text{høyde}\end{smallmatrix}\right)\, dy$

### Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

### Kurvelengde til $x = g(y) \quad c \leq y \leq d$

Hvis $g$ er kontinuerlig og deriverbar på $[c, d]$, da er lengden av kurven (grafen) $x = g(y)$ fra $y = c$ til $y = d$ lik

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$$

### Moment, masse og massesenter til en tynn stang langs $x$-aksen med tetthetsfunksjon $\delta(x)$

| | |
|---|---|
| Moment om origo | $M_0 = \int_a^b x\delta(x)\, dx$ |
| Masse | $M = \int_a^b \delta(x)\, dx$ |
| Massesenter | $\overline{x} = \frac{M_0}{M}$ |

### Momenter, masse og massesenter til en tynn plate

| | |
|---|---|
| Massesenter til en "stripe" | $(\tilde{x}, \tilde{y})$ |
| Massetettetsfunksjon | $\delta$ |
| Massen til en stripe | $dm = \delta \cdot \text{lengde} \cdot \text{bredde}$ |
| Moment om $x$-aksen | $M_x = \int \tilde{y}\, dm$ |
| Moment om $y$-aksen | $M_y = \int \tilde{x}\, dm$ |
| Massen til plata | $M = \int\, dm$ |
| Massesenter til plata | $\overline{x} = \frac{M_y}{M} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M}$ |

stripe || x-aksen $\Leftrightarrow$ $\tilde{y} = y$, bredde $= dy$

stripe || y-aksen $\Leftrightarrow$ $\tilde{x} = x$, bredde $= dx$

## 1.30 Transcendente funksjoner

### Enentydig funksjon

En funksjon $f(x)$ er **enentydig** (eller **injektiv**) på $D_f$ hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ når $x_1 \neq x_2$ i $D_f$.

### Horisontallinjetesten for enentydige funksjoner

En funksjon $y = f(x)$ er enentydig hvis og bare hvis grafen skjærer enhvær horisontal linje høyest ett sted.

### Invers funksjon

Anta at $f$ er en enentydig funksjon på en definisjonsmengde $D$ med verdimengde $R$. Den **inverse funksjonen** $f^{-1}$ er definert ved

$$f^{-1}(a) = b \quad \text{hvis} f(b) = a$$

Definisjonsmengden til $f^{-1}$ er $R$ og verdimengden til $f^{-1}$ er $D$.

### Resiprok

Om et tall $a \in \mathbb{R}$ ikke er lik null, kan vi finne en delt på tallet, nemlig $\frac{1}{a}$. Dette tallet kalles da $a$'s **resiprok**.

### Den deriverte av en invers funksjon

Hvis $f$ har et intervall $I$ som definisjonsmengde og $f'(x)$ finnes og aldri er null på $I$, da er $f^{-1}$ deriverbar på alle punkter i dens definisjonsmengde. Verdien til $(f^{-1})'$ ved et punkt $b$ i definisjonsmengden til $f^{-1}$, er resiproken til verdien til $f'$ ved punktet $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

eller

$$\left.\frac{d f^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{d f}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

### Den naturlige logaritmen $\ln x$

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \qquad x > 0$$

### Det naturlige tallet $e$

Tallet $e$ er det tallet i definisjonsmengden til den naturlige logaritmen som tilfredsstiller likningen

$$\ln(e) = 1$$

### Egenskaper til logaritmer

For vilkårlige tall $a > 0$ og $x > 0$, så gjelder følgende regler:

$$\begin{aligned} \ln ax &= \ln a + \ln x && \text{produktregelen} \\ \ln \frac{a}{x} &= \ln a - \ln x && \text{kvotientregelen} \\ \ln \frac{1}{x} &= -\ln x && \text{resiprokregelen} \\ \ln x^r &= r \ln x && \text{potensregelen} \end{aligned}$$

### Den naturlige eksponentialfunksjonen $e^x$

For $x \in \mathbb{R}$, så er den inverse funksjonen til $\ln x$ lik $e^x$:

$$e^x = \ln^{-1} x = \exp x$$

Dette fører til at

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x && \text{for alle } x > 0 \\ \ln(e^x) &= x && \text{for alle } x \end{aligned}$$

### Generelle eksponentialfunksjoner

For alle tall $a > 0$ og $x$, så har vi

$$a^x = e^{x \ln a}$$

### Generelle logaritmefunksjoner

For alle positive tall $a \neq 1$, så er

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{den inverse funksjonen av} \quad a^x$$

Dette fører til at

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x && \text{for alle } x > 0 \\ \log_a(a^x) &= x && \text{for alle } x \end{aligned}$$

### Malthus' lov for eksponentiell vekst

Om man antar at øyeblikkelig endringshastighet til en størrelse er proporsjonal med størrelsen får man

$$\frac{d}{dt} y(t) = ky$$

Hvis $y = y_0$ når $t = 0$ så er løsningen på denne likningen

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

der $k > 0$ gir "vekst" og $k < 0$ gir "nedgang". $k$ kalles vekstfaktoren. Funksjonen kan brukes til å modellere f.eks. ubegrenset vekst eller radioaktiv nedbrytning.

### Vekstrater når $x \to \infty$

La $f(x)$ og $g(x)$ være positive for tilstrekkelig store $x$. Hvis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

eller, tilsvarende, om

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

så sier vi at $f$ **vokser raskere enn** $g$, evt at $g$ **vokser seinere enn** $f$. Hvis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad \text{(et endelig tall)}$$

så har $f$ og $g$ **samme vekstrate** når $x \to \infty$.

### Inverse trigonometriske funksjoner

$$\begin{aligned} y &= \sin^{-1} x && \text{er tallet i } [-\pi/2, \pi/2] \text{ der } \sin y = x \\ y &= \cos^{-1} x && \text{er tallet i } [0, \pi] \text{ der } \cos y = x \\ y &= \tan^{-1} x && \text{er tallet i } \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \text{ der } \tan y = x \end{aligned}$$

### Inverse trigonometriske identiteter

$$\begin{aligned} \cos^{-1} x &= \pi/2 - \sin^{-1} x \\ \cot^{-1} x &= \pi/2 - \tan^{-1} x \\ \csc^{-1} x &= \pi/2 - \sec^{-1} x \end{aligned}$$

## 1.31 Numerisk integrasjon

### Trapesmetoden

Et bestemt integral av $f$ fra $a$ til $b$ kan approksimeres ved å stykke opp intervallet i $n$ like store lengder, og summere arealet av trapesene fra $x$-aksen til $f$. Bredden på hvert trapes blir $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Summen av trapesarealene blir da

$$T = \frac{\Delta x}{2} \left( f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\Delta x) + f(b) \right)$$

### Simpsons metode

$$S = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Der $y$'ene er verdier av $f$ ved partisjonspunktene

$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b.$

Tallet $n$ er et partall, og $\Delta x = (b - a)/n$.

# 2 Lineær algebra og differensiallikninger

En **lineær likning** med variabler $x_1, \ldots, x_n$ kan skrives

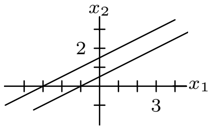
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

der $b$ og **koeffisientene** $a_1, \ldots, a_n$ er reelle eller komplekse tall. Et **system med lineære likninger** (eller et **lineært system**) er en samling med en eller flere lineære likninger. F.eks.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 &= 8 \\ x_1 - 4x_3 &= -7 \end{aligned}$$

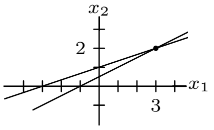
En løsning av systemet er en liste $(s_1, \ldots s_n)$ med tall som gjør at hver likning stemmer når man bytter ut $x_1, \ldots, x_n$ med $s_1, \ldots, s_n$. Samlingen av alle mulige løsninger kalles **løsningsmengden**. To lineære systemer kalles **ekvivalente** hvis de har samme løsningsmengde. Å finne løsningsmengden til et system med to lineære likninger med to variable med reelle koeffisienter er ekvivalent med å finne ut hvor to linjer krysser hverandre. F.eks:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= \phantom{-}3 \end{aligned}$$



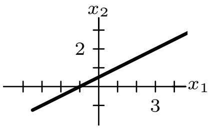
Ingen løsning

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= \phantom{-}3 \end{aligned}$$



Nøyaktig én løsning

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= \phantom{-}1 \end{aligned}$$



Uendelig mange løsninger

Et lineært system har enten ingen løsning, eller nøyaktig én løsning, eller uendelig mange løsninger.

Et lineært system er **konsistent** hvis det har minst en løsning og er **inkonsistent** hvis det ikke har noen løsning. Et lineært system kan representeres med en matrise. F.eks. gitt det lineære systemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \end{aligned}$$

så kan man representere koeffisientene i systemet med følgende **koeffisientmatrise**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Hele det lineære systemet kan representeres med følgende **augmenterte matrise**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

**Størrelsen** til en matrise sier hvor mange rader og kolonner den har. Den augmenterte matrisa ovenfor har 3 rader og 4 kolonner. En **$m \times n$ matrise** (“$m$ ganger $n$ matrise”) er en matrise med $m$ rader og $n$ kolonner. $m$ og $n$ trenger ikke å være forskjellige tall. Hvis to matriser er ekvivalente bruker man tegnet $\sim$ mellom dem. Tre grunnleggende **radoperasjoner** kan benyttes på lineære systemer uten at det påvirker løsningsmengden:

1. (erstatning) Erstatte en rad med summen av seg selv og en multippel av en annen rad.
2. (ombytting) Bytte om to rader.
3. (skalering) Gange alle tall i en rad med et tall ulik 0.

Eks.1: Erstatter rad 2 med (rad 2) + (4 ganger rad 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4+4\cdot 1 & 5+4\cdot(-2) & 9+4\cdot 1 & -9+4\cdot 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

Eks.2: Bytter rad 2 med rad 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Eks.3: Ganger alle tall i rad 2 med $\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot\frac{1}{2} & -8\cdot\frac{1}{2} & 8\cdot\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

En **enhetsmatrise** av størrelse $n \times n$ er en kvadratisk matrise med 1 langs diagonalen fra øverste venstre hjørne til nederste høyre hjørne og 0 ellers. Eksempel på en 3×3 enhetsmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ved å bruke radoperasjonene for å få koeffisientmatrisen mest mulig lik en enhetsmatrise kalles **radreduseringg**. Gjør man det med eksempelmatrisen ovenfor får man følgende:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Og man har funnet en unik løsning på det opprinnelige systemet med $s_1 = 29, s_2 = 16, s_3 = 3$. To matriser er **radekvivalente** hvis det finnes en rekkefølge av elementære radoperasjoner som transformerer den ene matrisen til den andre. Hvis de augmenterte matrisene til to lineære systemer er radekvivalente så har systemene samme løsningsmengde.

Et **ledende tall** i en rad er det tallet lengst til venstre i en rad som ikke er lik 0. En **nullrad** er en rad der alle tall er 0. En rad er **ikkenull** om den inneholder minst ett tall som ikke er lik 0. En matrise er på **trappeform** hvis den har følgende tre egenskaper:

1. Alle ikkenull-rader ligger over alle eventuelle nullrader.
2. Det ledende tallet i en rad ligger i en kolonne som er til høyre for det ledende tallet i raden over.
3. Alle tall i en kolonne under et ledende tall er 0.

Hvis en matrise på trappeform i tillegg har følgende egenskaper, så er matrisa på **redusert trappeform**:

4. Det ledende tallet i alle ikkenull-rader er lik 1.
5. Hvert ledende 1-tall er det eneste tallet som ikke er lik 0 i kolonnen.

Følgende matriser er i hhv trappeform og red. trappeform:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**TEOREM 1: Enhver matrise er radekvivalent med en og bare en matrise på redusert trappeform.**

En **pivotposisjon** i en matrise $A$ er en posisjon i $A$ som korresponderer med et ledende 1-tall i den reduserte trappeformen til $A$. En **pivotkolonne** er en kolonne i $A$ som inneholder en pivotposisjon. En **pivot** er et tall ulik 0 i en pivotposisjon som brukes til å lage 0'er i de andre radene i kolonnen vha radoperasjoner.

Hvis en augmentert matrise på redusert trappeform har minst en nullrad, har systemet minst en **fri variabel**, og systemet har uendelig mange løsninger. F.eks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Tilsvarer systemet} \quad \begin{aligned} x_1 \quad - 5x_3 &= 1 \\ x_2 + \ x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Variablene $x_1$ og $x_2$ kalles **ledende variable**, mens $x_3$ her er en fri variabel. Slike konsistente systemer kan skrives som en **generell løsning** ved å løse det reduserte likningssystemet mhp de ledende variablene:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ er fri} \end{cases}$$

Her står løsningen på **parameterform**, men kan også omformes til **parametrisk vektorform** slik:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 5x_3 \\ 4 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$$

$$\text{der} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad t \in \mathbb{R}$$

**TEOREM 2: Eksistens og entydighetsteorem. Et lineært system er konsistent hvis og bare hvis kolonnen lengst til høyre i en augmentert matrise *ikke* er en pivotkolonne, dvs hvis og bare hvis en trappeform av den augmenterte matrisa *ikke* har noen rad på formen**

$$[\,0 \quad \cdots \quad 0 \quad b\,] \qquad \textbf{der} \quad b \neq 0$$

**Hvis systemet er konsistent, da inneholder løsningsmengden enten (i) en unik løsning uten fri variabler eller (ii) uendelig mange løsninger med minst en fri variabel.**

En matrise med kun én kolonne kalles en **kolonnevektor**, eller bare en **vektor**. Et hvert punkt i $n$ dimensjoner kan representeres med en vektor med $n$ rader. Det geometriske punktet $(a, b)$ i $\mathbb{R}^2$ kan identifiseres med vektoren $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. To vanlige notasjoner for vektorer som variabler er enten fet skrift: $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, eller pil over bokstav: $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Addisjon og subtraksjon av vektorer gjøres rad for rad:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Gitt $\vec{v}$ og $c \in \mathbb{R}$ så er $c \cdot \vec{v}$ en **skalar multippel** av $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad c = 3 \quad \Rightarrow \quad c\vec{v} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

En **nullvektor** er en vektor der alle tallene er lik 0, og kan skrives som $\vec{0}$. For alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ i $\mathbb{R}^n$ og $c, d \in \mathbb{R}$ har vi:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u} \\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \\ c(\vec{u} + \vec{v}) &= c\vec{u} + c\vec{v} \\ (c+d)\vec{u} &= c\vec{u} + d\vec{u} \end{aligned}$$

### Summen/differansen av to matriser

Dette er definert for to matriser som er like store:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

### Skalering av en matrise

En matrise kan ganges med et tall; Man ganger da alle tallene i matrisa med tallet:

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

### Produktet av to matriser

Hvis antall kolonner i en matrise likt antall rader i en annen matrise, så kan de ganges sammen som i eksempelet her:

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & A \cdot B \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 17 & 3 & 4 \\ 15 & 7 & -8 & 4 \\ -3 & 27 & 11 & -4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 13 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 68 & -9 & -51 & 28 \\ 174 & 280 & -27 & 24 \\ 37 & 163 & 26 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

F.eks. så har $-27$ her kommet frem ved å plusse sammen produktet av tall fra 2. rad i $A$ og 3. kolonne i $B$ slik:

$$0 \cdot 3 + 13 \cdot (-8) + 7 \cdot 11 = -27$$

### Regneregler for matriser

La $A, B, C$ være vilkårlige matriser, $I$ enhetsmatrisen og 0 være matrisen der alle tallene er lik null. Vi har da følgende regler for matriseregning (der størrelsene på matrisene er slik at den aktuelle formelen gir mening):

$$\begin{gathered} A + B = B + A \\ A + (B + C) = (A + B) + C \\ A + 0 = 0 + A = A \\ A - A = 0 \\ A(BC) = (AB)C \\ AI = IA = A \\ A(B + C) = AB + AC \end{gathered}$$

I tillegg er operasjonen $A^k$ der $k \in \mathbb{N}$ definert som å gange $A$ med seg selv $k$ ganger. $M^0$ er definert til å være lik $I$.

### Den inverse til en matrise

Hvis $A$ er en kvadratisk matrise, så er $A^{-1}$ definert slik at

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

En matrise $A$ er inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Inversen til en $2 \times 2$-matrise er

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### Inverser i likningsløsing

Hvis $Y = AX$ og $|A| \neq 0$ så er $X = A^{-1}Y$

### Negative eksponenter

Vi definerer $\quad A^{-k} = (A^{-1})^k \qquad k \in \mathbb{N}$

Som fører til $A^p A^q = A^{p+q} \qquad$ og $\qquad (A^p)^q = A^{qp}$

### Inversen til et produkt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

### Determinanter

Det generelle likningssystemet

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= p \\ cx_1 + dx_2 &= q \end{aligned}$$

Kan løses slik:

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Som gir

$$x_1 = \frac{dp-bq}{ad-bc}, \qquad x_2 = \frac{aq-cp}{ad-bc}$$

Dette betyr at det generelle $2\times2$-systemet har en entydig bestemt løsning når den såkalte **determinanten** $ad - bc \neq 0$. Hvis vi har følgende generelle system av $n$ likninger med $n$ ukjente:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

så kalles systemet **homogent** hvis $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ og **inhomogent** hvis minst en $b_i \neq 0$. Generelt kan vi da si at hvis $D$ er determinanten til et lineært likningssystem med $n$ likninger med $n$ ukjente så har vi følgende fire muligheter:

| | $D \neq 0$ | $D = 0$ |
|---|---|---|
| inhomogent | entydig bestemt løsning | enten uendelig mange løsninger, eller ingen løsninger |
| homogent | kun triviell løsning $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$ | uendelig mange ikke-trivielle løsninger |

Determinanten til en $2\times2$-matrise er:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinanten til en $3\times3$-matrise er:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

For $n \geq 3$ kan determinanten til en $n\times n$-matrise defineres rekursivt på følgende måte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\det(M_1) - a_{12}\det(M_2) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det(M_n)$$

der $\det(M_i)$ er determinanten til den $(n-1)\times(n-1)$-matrisen som kommer frem når vi stryker rad 1 og kolonne $i$.

### Cramers regel

La $D \neq 0$ være determinanten til koeffisientmatrisen til likningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Da har likningssystemet løsningen

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

$$\ldots,\ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{D}$$

### Determinant ved kofaktorekspansjon

$$\text{Kofaktorekspansjon av } \begin{vmatrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ langs 3. kolonne:}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\begin{matrix} -11 & 2 & \boxed{17} & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & \boxed{9} & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & \boxed{-7} & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & \boxed{3} & 4 \end{matrix}$ |
| $(-1)^{1+3} \cdot 17 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ | $(-1)^{2+3} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ | $(-1)^{3+3} \cdot -7 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ | $(-1)^{4+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ |
| $= 17 \cdot 44$ | $= (-9) \cdot (-232)$ | $= (-7) \cdot 138$ | $= (-3) \cdot 472$ |
| $= 748$ | $= 2088$ | $= -966$ | $= -1416$ |

$$\text{Det} = 748 + 2088 - 966 - 1416 = 454$$

---

### Egenverdi og egenvektor

La $A$ være en kvadratisk matrise. Et tall $\lambda$ kalles en **egenverdi** for $A$ hvis det finnes en vektor $\overrightarrow{x} \neq 0$ slik at

$$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$$

$\overrightarrow{x}$ kalles en **egenvektor** for $A$ med $\lambda$ som **tilhørende egenverdi**. Vi har da at

$$A^k\overrightarrow{x} = \lambda^k\overrightarrow{x}$$

Egenverdiene til matrisen $A$ er de tallene $\lambda$ som gir

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

### Metode for å finne egenverdiene og egenvektorene

1. Regn ut determinanten $\det(A - \lambda I)$, som blir et polynom i $\lambda$ av grad $n$.
2. Løs likningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Egenverdiene til $A$ er alle løsningene $\lambda$ av denne likningen. Eventuelle komplekse løsninger regnes også som egenverdier til $A$.
3. For hver reell egenverdi $\lambda$, løs likningen $(A - \lambda I)X = 0$. De løsningene $X$ som ikke er lik 0, er egenvektorene til $A$ med $\lambda$ som tilhørende egenverdi.

**Lengden** (eller **normen**) til $\overrightarrow{v}$ er den ikke-negative skalaren

$$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

### Gram-Schmidt-prosessen

Hvis $\{\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots, \overrightarrow{x}_p\}$ er en basis for et underrom $W$ i $\mathbb{R}^n$, så er $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_p\}$ en ortogonal basis for $W$ der

$$\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{x}_1$$

$$\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{x}_2 - \frac{\overrightarrow{x}_2 \cdot \overrightarrow{v}_1}{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1}\overrightarrow{v}_1$$

$$\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{x}_3 - \frac{\overrightarrow{x}_3 \cdot \overrightarrow{v}_1}{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1}\overrightarrow{v}_1 - \frac{\overrightarrow{x}_3 \cdot \overrightarrow{v}_2}{\overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{v}_2}\overrightarrow{v}_2$$

$$\vdots$$

$$\overrightarrow{v}_p = \overrightarrow{x}_p - \frac{\overrightarrow{x}_p \cdot \overrightarrow{v}_1}{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1}\overrightarrow{v}_1 - \cdots - \frac{\overrightarrow{x}_p \cdot \overrightarrow{v}_{p-1}}{\overrightarrow{v}_{p-1} \cdot \overrightarrow{v}_{p-1}}\overrightarrow{v}_{p-1}$$

I tillegg så har

$$\text{Span}\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_k\} = \text{Span}\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_k\} \text{ for } 1 \leq k \leq p$$

En ortonormal basis $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}$ får vi ved å dele hver av vektorene i den ortogonale basisen på sin egen norm:

$$\overrightarrow{u}_k = \frac{1}{||\overrightarrow{v}_k||}\overrightarrow{v}_k \qquad \text{for } 1 \leq k \leq p$$

### Omforming av uttrykket $a\cos\omega t + b\sin\omega t$

La $a$, $b$ og $\omega$ være gitte tall $\neq 0$ med $\omega > 0$. Funksjonen

$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

kan skrives på formen

$$f(t) = C\cos\left(\omega(t - t_0)\right)$$

der $(C, \omega t_0)$ er polarkoordinatene til punktet $(a, b)$.

Spesielt har vi

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{og} \qquad \tan(\omega t_0) = \frac{b}{a}$$

Vinkelen $\omega t_0$ ligger i intervallet $[0, 2\pi\rangle$ og hører til samme kvadrant som punktet $(a, b)$.

## Differensiallikninger

Hvis $y(t)$ er kontinuerlig på et intervall $I$, så har vi følgende løsninger av forskjellige differensiallikninger på intervallet:

$$y' = ay \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{at}$$

$$y' = ay + b \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{at} - \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} y' &= ay^2 + by + c \\ &= a(y - A)(y - B) \quad \Rightarrow \quad y = A + \frac{B - A}{1 + ke^{(B-A)at}} \\ &\qquad\qquad \text{og} \quad y \equiv A \end{aligned}$$

### Første ordens inhomogen lineær diff.likning

$$y' + p(t)y = g(t)$$

har løsningen

$$y = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} g(t)\, dt + Ce^{-P(t)}$$

der $P(t)$ er en vilkårlig antiderivert av $p(t)$

**Separable differensiallikninger**

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(t)\, dt$$

### Høyere ordens differensialligninger med konstante koeffisienter

En høyere ordens differensialligning med konstante koeffisienter er en ligning

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

### Komplementær / homogen løsning

Den *tilhørende homogene* differensialligningen får vi ved å bytte ut høyresiden $f(t)$ med 0. Vi får da

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Vi løser en homogen høyere ordens differensialligninger med konstante koeffisienter ved først å løse den karakteristiske ligningen

$$a_n r^n + \cdots + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

som har røtter $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Deretter finner vi løsningene $y_1, y_2, \ldots, y_n$ til den homogene differensialligningen ved følgende regel:

Hvis $r_k = a + bi$, og denne roten har forekommet $m$ ganger før, er

$$y_k(t) = \begin{cases} t^m e^{at} \cos(bt) & \text{hvis } b \geq 0 \\ t^m e^{at} \sin(bt) & \text{hvis } b < 0 \end{cases}$$

«ploss rimer på cos, minus rimer på sinus»

Den *komplementære løsningen* $y_C$ er da

$$y_C = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdot + c_n \cdot y_n$$

### Partikulær løsning

Partikulær løsning kan du finne når du kjenner $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Hvis differensialligningen var av 2. orden har du kun 2 løsninger $y_1$ og $y_2$, og da har du en snarvei for $y_P$ som ser slik ut (bruk ikke $+C$ for integralene):

$$y_P = y_1 \cdot \int \frac{-y_2 \cdot f(t)}{|W|} dt + y_2 \cdot \int \frac{y_1 \cdot f(t)}{|W|} dt$$

der $|W|$ er *Wronski-determinanten* av $y_1, y_2$:

$$|W| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Hvis differensialligningen er av orden $n > 2$, kan du ikke bruke denne snarveien. Da må du løse følgende matriseligning (F.eks. med Cramers regel):

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_n \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Deretter finner du $u(t) = \int u'(t) dt$ (bruk ikke $+C$ for integralene), og til slutt

$$y_P = u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2 + \cdots u_n \cdot y_n$$

# 3 Matrisetransformasjoner

## 3.1 Todimensjonale vektorer

En todimensjonal vektor består av to tall og kan f.eks. representere en posisjon eller en forflytning i et todimensjonalt koordinatsystem. Som navn på vektorer brukes som regel små bokstaver. To vanlige skrivemåter er

**1**) Navn med fet skrift, $\boldsymbol{a}$, er vanlig i trykt tekst.

**2**) Pil over navn, $\vec{a}$, er vanlig i håndskrevet tekst.

Skrivemåte: $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x\text{-komponent} \\ \leftarrow y\text{-komponent} \end{matrix}$

Nullvektor: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Multiplikasjon av vektor med tall: $k\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix}$

Divisjon av vektor med tall: $\boldsymbol{a}/k = \begin{bmatrix} a_1/k \\ a_2/k \end{bmatrix}$

Addisjon av to vektorer: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$

Differanse av to vektorer: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{bmatrix}$

Lengden av en vektor: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Skalarprodukt (prikkprodukt): $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Dette betyr at $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$.

Hvis $\boldsymbol{a}$ står vinkelrett på $\boldsymbol{b}$ skrives det slik: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$

Det viser seg at $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$

En enhetsvektor er en vektor med lengde 1. For å regne ut en enhetsvektor $\boldsymbol{n}$ som peker samme retning som en vektor $\boldsymbol{v}$ brukes formelen

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$$

Kryssprodukt/vektorprodukt er en regneoperasjon definert for tredimensjonale vektorer:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{v}$ vil nå stå vinkelrett både på $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$. Det er også slik at

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

En teknikk for å regne ut kryssproduktet mellom to vektorer:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 \\ 3 \times 6 \\ 1 \times 4 \\ 2 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{\cdot}6 - 5{\cdot}3 \\ 3{\cdot}4 - 6{\cdot}1 \\ 1{\cdot}5 - 4{\cdot}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 15 \\ 12 - 6 \\ 5 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

## 3.2 Matriser

En matrise er en samling med tall som er arrangert i rader og kolonner. Som navn på matriser brukes som regel store bokstaver. I trykt tekst er det vanlig å bruke fet skrift på navnet, mens i håndskreven tekst er det vanlig å bare skrive en stor bokstav. En **$m$×$n$-matrise** ("$m$ ganger $n$ matrise") er en matrise med $m$ rader og $n$ kolonner. $m$ og $n$ trenger ikke å være forskjellige tall.

En 2×3-matrise kan skrives slik:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Et tall i en matrise kalles et element. Navn på elementer i matriser følger dette systemet med to indekser:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Dvs: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{23} = 1$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = -2$.

Multiplikasjon av 2×2-matrise med 2D-vektor:

$$\boldsymbol{Ap} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 \end{bmatrix}$$

Hvis antallet kolonner i en matrise likt antallet rader i en annen matrise, så kan de ganges sammen som i eksempelet her:

$$\begin{array}{c|c} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 17 & 3 & 4 \\ 15 & 7 & -8 & 4 \\ -3 & 27 & 11 & -4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 13 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 68 & -9 & -51 & 28 \\ 174 & 280 & -27 & 24 \\ 37 & 163 & 26 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

F.eks. så har $-27$ her kommet frem ved å plusse sammen produktet av tall fra 2. rad i $\boldsymbol{A}$ og 3. kolonne i $\boldsymbol{B}$ slik:

$$0 \cdot 3 + 13 \cdot (-8) + 7 \cdot 11 = -27$$

Merk at $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ som regel ikke er lik $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$!

## 3.3 Rotasjonsmatrise i 2D

Rotasjon som dreier en vektor mot klokka en vinkel $\theta$:

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

## 3.4 Rotasjon av en graf $y = f(x)$

Grafen til en likning med $y$ og $x$ roteres med en vinkel $\theta$ ved å bytte ut $x$ og $y$ i likningen med hhv. $x$- og $y$-komponenten til

$$\boldsymbol{R}(-\theta) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta \\ -x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{bmatrix}$$

## 3.5 Skalering med diagonalmatriser

En kvadratisk matrise har like mange rader og kolonner. Diagonalen i en kvadratisk matrise betyr elementene fra øverste venstre hjørne til nederste høyre hjørne. Kvadratiske matriser kan være symmetriske. Da er verdien på elementene speilet om diagonalen like. En symmetrisk 2×2-matrise kan skrives slik:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & b \\ b & a_{22} \end{bmatrix}$$

En diagonalmatrise er en symmetrisk matrise der alle de symmetriske verdiene er lik 0. En 2×2-diagonalmatrise kan skrives:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

En diagonalmatrise skalerer vektorer langs $x$- og $y$-aksene:

$$\boldsymbol{Dp} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_1 \\ a_{22}p_2 \end{bmatrix}$$

## 3.6 Skalering med symmetriske matriser

Sporet (trasen) til en matrise: $\operatorname{tr}\boldsymbol{M} = a_{11} + a_{22}$. Determinanten til en matrise: $\det\boldsymbol{M} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. En matrise $\boldsymbol{M}$ er positiv hvis $\operatorname{tr}\boldsymbol{M} \geq 0$ og $\det\boldsymbol{M} \geq 0$.

## Egenverdier

En symmetrisk matrise skalerer vektorer med faktorer som kalles matrisens egenverdier. Egenverdiene til matrisen $\boldsymbol{M}$ regnes ut med formelen

$$g = \frac{1}{2}\left(m_{11} + m_{22} \pm \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}\right)$$
$$\boldsymbol{M} \text{ er positiv} \quad \Leftrightarrow \quad g_1 \geq 0 \quad \text{og} \quad g_2 \geq 0$$

Egenverdiene $g_1$ og $g_2$ utgjør spekteret til $\boldsymbol{M}$. Det å finne dem kalles spektralanalyse. Hvis $\boldsymbol{M}$ er en diagonalmatrise så er egenverdiene lik elementene på diagonalen til $\boldsymbol{M}$. Skalering skjer langs matrisens egenakser som går langs matrisens egenvektorer. Egenvektorene $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ regnes ut med formlene

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g_1 - m_{11} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g_2 - m_{11} \end{bmatrix}$$

Egenakser står alltid vinkelrett på hverandre.

For en symmetrisk matrise $\boldsymbol{M}$ med egenverdier $g_1$ og $g_2$ og tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ så er de følgende såkalte egenverdilikningene oppfylt:

$$\boldsymbol{Mu} = g_1\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{Mv} = g_2\boldsymbol{v}$$

## 3.7 Matriserotasjon

Egenaksene til en symmetrisk matrise $\boldsymbol{M}$ kan roteres med en vinkel $\theta$ med formelen

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}(-\theta)$$

Hvis $\boldsymbol{M}$ roteres slik at egenaksene går langs $x$- og $y$-aksene så blir $\boldsymbol{N}$ en diagonalmatrise. Dette kalles å diagonalisere $\boldsymbol{M}$.

Omvendt så kan en diagonalmatrise $\boldsymbol{D}$ som skalerer langs $x$- og $y$-aksene roteres med en vinkel $\theta$ for å skalere langs andre akser, slik:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}(-\theta)\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}(\theta)$$

## 3.8 Translasjon (flytting)

Et punkt $\boldsymbol{p}$ kan transleres ved å legge til en vektor $\boldsymbol{d}$ slik at punktet blir flyttet til $\boldsymbol{p'}$ slik:

$$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d}$$

Å flytte i *retningen* til $\boldsymbol{d}$, en lengde på $k$, gjøres slik:

$$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|} \cdot k$$

Men for å translere punkter med matrisemultiplikasjon trengs homogene koordinater.

## 3.9 Homogene 2D-koordinater

Et punkt i planet kan representeres med vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Det samme punktet representeres i homogene koordinater slik:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 3.10 Homogene transformasjoner

Homogene transformasjoner utføres alltid ved å gange en såkalt transformasjonsmatrise med en vektor. Resultatet er en ny vektor som er den transformerte vektoren.

### Homogen translasjon i 2D

Et punkt $\boldsymbol{p}$ kan transleres til punktet $\boldsymbol{p'}$ med en vektor $\boldsymbol{a}$ og translasjonsmatrisen $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})$ definert slik:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Homogen rotasjon i 2D

Rotasjon som dreier en vektor mot klokka en vinkel $\theta$:

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Homogen skalering i 2D

Transformasjon med en symmetrisk matrise $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & b & 0 \\ b & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 3.11 Kombinasjoner av transformasjoner

En transformasjon kan settes sammen av andre. F.eks. for å først rotere $\boldsymbol{p}$ med en vinkel på 45°, så translere med vektoren $\boldsymbol{a}$, og til slutt rotere med en vinkel på 32°:

$$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{R}(32°)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{R}(45°)\boldsymbol{p}$$

Merk at transformasjonen som utføres sist skal stå først!

## 3.12 Rotasjon/skalering om et punkt

En vanlig rotasjonstransformasjon vil utføres med origo som sentrum. For å rotere om en vilkårlig akse $\boldsymbol{a}$ brukes transformasjonen

$$\boldsymbol{R}(\theta, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{a})$$

Tilsvarende gjelder for skalering.

## 3.13 Rotasjoner i rommet

Rotasjon av en tredimensjonal vektor $\boldsymbol{r}$ kan utføres med en 3×3-matrise $\boldsymbol{M}$ med to parametere:

1) En enhetsvektor $\boldsymbol{n}$ som bestemmer rotasjonsakse og rotasjonsretning; Om $\boldsymbol{n}$ står vinkelrett ut fra midten av en klokke, vil rotasjonen foregå motsatt vei av viserene.
2) Rotasjonsvinkelen $\theta$.

Den roterte vektoren $\boldsymbol{r'}$ kan regnes ut uten å bruke en rotasjonsmatrise, slik (Goldstein, Charles P. Poole & Safko, 2000):

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r}\cos\theta + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r})(1 - \cos\theta) + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r})\sin\theta$$

Rotasjonsmatrisen blir slik:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \theta) = \boldsymbol{I}\cos\theta + \boldsymbol{N}(1 - \cos\theta) + \boldsymbol{A}\sin\theta$$

Der $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{N}$ og $\boldsymbol{A}$ er definert som følger:

$\boldsymbol{I}$ er den såkalte identitetsmatrisen, som er en diagonalmatrise med 1 langs diagonalen, altså

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{N}$ er tensorproduktet $\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$, dvs $N_{ij} = n_i n_j$:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} n_1n_1 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & n_2n_2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & n_3n_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 3.14 Homogene 3D-koordinater

Et punkt i rommet kan representeres med vektoren

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Det samme punktet representeres i homogene koordinater slik:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Homogen translasjon i 3D

Translasjonsmatrisen $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})$ for 3 dimensjoner er definert slik:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Homogen rotasjon i 3D

Dette fungerer på tilsvarende måte som i 2D; Rotasjonsmatrisen $\boldsymbol{R}$ regnes ut og representeres i homogene koordinater med matrisen

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Rotasjon om vilkårlig akse

En rotasjon en vinkel $\theta$ om en akse som er parallell til vektoren $\boldsymbol{n}$, men som går gjennom punktet $\boldsymbol{a}$ er representert av matrisen

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta,\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{a})$$

## 3.15 Syntaks i Maxima

Kommandoer gis til programmet med tekst + `Shift+Enter`. For å regne på vektorer og matriser må man først kjøre kommandoen `load(vect)`. Alle svar får navn på formen `%o`+tall og kan refereres til ved dette navnet i følgende utregninger. Sinus og cosinus regnes ut med funksjonene `sin()` og `cos()`. Programmet regner kun med radianer. Referer til $\pi$ med `%pi`.

Lage en vektor: `p:[1,1,2]`
Legge sammen vektorer: `p+q`
Tall ganger vektor: `3*p`
Skalarprodukt: `p.q` (med punktum)
Lengde av vektor: `sqrt(p.p)`
Lage matrise: Velg i menyen: `Algebra→Enter Matrix...`
Gange matrise med vektor: `A.p`
Gange matrise med matrise: `A.B`
Kryssprodukt: `p~q`
Noen uttrykk må tvinges frem med: `express()`
Svar som desimaltall: `float()`
Antall siffer i svar kan stilles med: `fpprintprec:4`
Dette setter antall siffer i svar til 4.
Funksjoner kan lages med operatoren `:=`
F.eks. kan man bruke menyen for å sette inn en 2×2 rotasjonsmatrise og så navigere seg til uttrykket med piltastene og redigere så det ser slik ut (med shift+enter etterpå):

```
R(t):= matrix(
 [cos(t),-sin(t)],
 [sin(t),cos(t)]
);
```

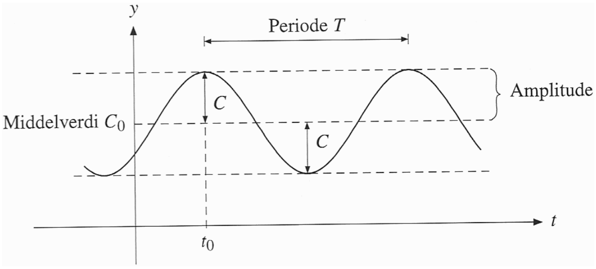
For filer som åpnes i programmet wxMaxima, så må programmet regne ut alle uttrykkene på nytt. Dette gjøres med menyvalget `Cell→Evaluate All Cells` (Ctrl+R).

# 4 Anvendt matematikk

## 4.1 Periodiske fenomener

Et periodisk fenomen kan ofte tilpasses med funksjonen

$$y = C_0 + C\cos\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right)$$



### Sirkelfrekvens/vinkelfrekvens/vinkelhastighet

Hvis $T$ er perioden til en harmonisk svingning, så kaller vi størrelsen $2\pi/T$ svingningens sirkelfrekvens $\omega$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \Leftrightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La $\omega$ være et positivt tall. Funksjonene $\cos\omega t$ og $\sin\omega t$ gir harmoniske svingninger med sirkelfrekvens $\omega$ og periode $T = 2\pi/\omega$.

### Interferens

Gitt $C_1, C_2 \geq 0$ og

$$f(t) = C_1\cos(\omega t - \phi_1) \qquad \text{og} \qquad g(t) = C_2\cos(\omega t - \phi_2)$$

Amplituden $C$ til funksjonen $f(t) + g(t)$ er da gitt ved

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

og middelverdien er 0.

## 4.2 Eksponentialfunksjon med $a$ som grunntall

Funksjoner på formen

$$f(t) = a^t$$

der $t \in \mathbb{R}$ og $a \in \mathbb{R}^+$ kalles **eksponentialfunksjoner**. $a$ kalles **grunntallet**.

En funksjon på formen $f(t) = c \cdot a^t$ kan tilpasses til å gå gjennom punktene $(t_1, y_1)$ og $(t_2, y_2)$ hvis $t_1 \neq t_2$ og ingen av punktene ligger i origo. Formlene for dette ser slik ut:

$$a = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}}$$

$$c = \frac{y_1}{a^{t_1}} = \frac{y_2}{a^{t_2}}$$

Hvis $t_1 < t_2$ så har vi at

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} = \frac{c \cdot a^{t_2}}{c \cdot a^{t_1}} = a^{t_2 - t_1}$$

Dvs at eksponentialfunksjoner har samme vekstfaktor over alle intervaller av samme lengde.

## 4.3 Økning/minking med $p$ % per år

En størrelse $y$ som **vokser/avtar** eksponentiellt med $p$ % per år og er lik $y_0$ ved tiden $t_0$ kan beskrives med funksjonen

$$y(t) = c \cdot a^t \qquad \text{der} \qquad a = 1 \pm \frac{p}{100} \quad \text{og} \quad c = \frac{y_0}{a^{t_0}}$$

## 4.4 Eksponentialfunksjon med $e$ som grunntall

Funksjonen $f(x) = a^x$ kan skrives:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x} && \text{der} \quad \lambda = \ln a \geq 0, \quad \text{hvis } 0 < a < 1 \\ f(x) &= e^{-\lambda x} && \text{der} \quad \lambda = -\ln a \geq 0, \quad \text{hvis } a > 1 \end{aligned}$$

Hvis $f$ er voksende, er **doblingstiden** $T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Hvis $f$ er avtakende, er **halveringstiden** $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

## 4.5 Funksjonen $pH$

$pH$ er en funksjon som gir et mål på hvor mange $H_3O^+$-molekyler det finnes per liter i en væskeløsning. Denne konsentrasjonen skrives som $\left[H_3O^+\right]$ og har benevning mol/L. Denne funksjonen er definert slik:

$$pH\left(\left[H_3O^+\right]\right) = -\log\left(\left[H_3O^+\right]\right)$$

$pH > 7$ betyr en basisk løsning. $pH < 7$ betyr en sur løsning.

## 4.6 Aldersbestemmelse etter $^{14}$C-metoden

Hvis $I_0$ er forholdet mellom $^{14}$C og $^{12}$C i en levende organisme når den dør, så vil følgende funksjon $I(t)$ beskrive forholdet mellom mengden $^{14}$C som er igjen i liket i forhold til $I_0$ etter tiden $t$:

$$I(t) = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730}$$

## 4.7 Potensfunksjonen $f(x) = c \cdot x^r$

Hvis punktene $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$ ligger i første kvadrant og $x_1 \neq x_2$, så vil parameterene $r$ og $c$ til potensfunksjonen som går gjennom begge punktene være gitt ved

$$\begin{aligned} r &= \frac{\ln(y_2/y_1)}{\ln(x_2/x_1)} \\ c &= \frac{y_1}{x_1^r} = \frac{y_2}{x_2^r} \end{aligned}$$

## 4.8 Allometrisk vekst

La $y = y(t)$ er størrelsen av et gitt organ ved tiden $t$ og $x = x(t)$ være størrelsen av organismen som helhet ved tiden $t$. Ofte så har vi følgende sammenheng mellom $x$ og $y$:

$$y = cx^r$$

Der $c$ og $r$ er konstanter. $c$ avhenger av hvilke måleenheter en bruker for $x$ og $y$. Denne sammenhengen kalles "allometriloven".

## 4.9 Logaritmisk skala

Brukes for å sammenlikne størrelser av ulik størrelsesorden, der størrelsesordenen til et tall er gitt ved logaritmen (med grunntall 10) til tallet. Å plassere et (positivt) tall $r$ på en logaritmisk skala svarer til å plassere $\log r$ på den tilsvarende lineære skalaen.

Et **enkeltlogaritmisk koordinatsystem** med to akser har logaritmisk skala på den ene aksen og lineær skala på den andre aksen. Et **dobbeltlogaritmisk koordinatsystem** med to akser har logaritmisk skala på begge aksene.

Enhver eksponentialfunksjon $y = ca^x$ gir en rett linje når den plottes i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem med logaritmisk skala på $y$-aksen og lineær skala på $x$-aksen.

Enhver potensfunksjon $y = cx^r$ gir en rett linje når den plottes i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

## 4.10 Anvendelser av bestemt integral

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{tilbakelagt veilengde} \\ s'(t) &= v(t) = \text{banehastighet} \\ S &= \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt = s(t_1) - s(t_0) \\ &= \text{tilbakelagt veilengde i løpet av } [t_0, t_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(t) &= \text{vannvolum i et kar ved tiden } t \\ V'(t) &= v(t) = \text{tilstrømningshastighet} \\ \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt &= V(t_1) - V(t_0) \\ &= \text{økning i vannvolum i løpet av } [t_0, t_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \text{Effekten i kW ved tiden } t \\ \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt &= \text{Energien i kWh i løpet av } [t_0, t_1] \end{aligned}$$

## 4.11 Malthus' modell

La spesifikk vekstrate være definert som $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$, som kan tolkes som antall avkom et individ i en befolkning produserer per tidsenhet. Antar vi at denne størrelsen er konstant får vi

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = aN \quad \Rightarrow \quad N = Ce^{at}$$

## 4.12 Verhulsts' modell

La bæreevnen $B$ til befolkningen være så mange individer omgivelsene kan livnære. Om vi antar at spesifikk vekstrate er proporsjonal med forskjellen i bæreevne og antall individer, får vi

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a(B - N) \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = -aN(N - B)$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{B}{1 + ke^{-aBt}}$$

## 4.13 Radioaktiv nedbrytning

Om vi antar at endringen i antall radioaktive atomkjerner er proporsjonal med antallet kjerner får vi

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \Rightarrow \quad N = Ce^{-\lambda t}$$

$$\text{med halveringstid } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

## 4.14 Newtons avkjølingslov

Anta at et legeme avkjøles i omgivelser med konstant temperatur $T_*$. La $T_1 = T(t_1)$ være legemets temperatur ved tiden $t_1$ og $T_2 = T(t_2)$ være legemets temperatur ved tiden $t_2$ og $t_1 < t_2$. Vi definerer avkjølingsraten til å være $-\frac{dT}{dt}$. Hvis vi antar at avkjølingsraten er proporsjonal med temperaturdifferansen $T - T_*$ får vi

$$-\frac{dT}{dt} = k(T - T_*) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - T_*)$$
$$\Rightarrow \quad T = T_* + Ce^{-kt}$$

der

$$k = \frac{\ln((T_1 - T_*)/(T_2 - T_*))}{t_2 - t_1}$$

og

$$C = (T_1 - T_*)e^{kt_1} = (T_2 - T_*)e^{kt_2}$$

## 4.15 Allometrisk vekst

Om vi lar kroppens vekstrate være $\frac{dx}{dt}$ og en kroppsdels vekstrate være $\frac{dy}{dt}$ og antar at kroppdelens spesifikke vekstrate er proporsjonal med kroppens spesifikke vekstrate får vi

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = r\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad y = Cx^r$$

# Derivasjon

$f$, $g$, $u$ og $v$ er funksjoner av $x$. $a$ og $c$ er konstanter.

(1) $(f+g)' = f' + g'$

(2) $(cf)' = cf'$

(3) $(fg)' = f'g + g'f$

(4) $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

(5) $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

(6) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

(7) $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

(8) $(f^g)' = f^g \left(f' \frac{g}{f} + g' \ln f\right)$ $(f > 0)$

(9) $(a^f)' = f' a^f \ln a \qquad (a > 0)$

(10) $c' = 0$

(11) $x' = 1$

(12) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(13) $(x^x)' = x^x(1 + \ln x) \qquad (x > 0)$

(14) $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x \geq 0)$

(15) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0)$

(16) $(e^x)' = e^x$

(17) $(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a > 0)$

(18) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$

(19) $(\ln f)' = \frac{f'}{f} \quad (f > 0)$

(20) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (a \neq 1)$

(21) $(\sin x)' = \cos x$

(22) $(\cos x)' = -\sin x$

(23) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(24) $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(25) $(\cos^{-1} x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$

(26) $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

(27) $(\sinh x)' = \cosh x$

(28) $(\cosh x)' = \sinh x$

(29) $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

(30) $(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(31) $(\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(32) $(\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

# Integrasjon

(1) $\int dx = x + c$

(2) $\int x^n \, dx = \tfrac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

(3) $\int \tfrac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$

(4) $\int \tfrac{1}{ax+b} \, dx = \tfrac{1}{a} \ln|ax+b| + c$

(5) $\int \sin ax \, dx = -\tfrac{1}{a} \cos ax + c$

(6) $\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + c$

(7) $\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx$

(8) $\int \cos ax \, dx = \tfrac{1}{a} \sin ax + c$

(9) $\int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x + c$

(10) $\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$

(11) $\int \sin^2 x \, dx = \tfrac{2x - \sin 2x}{4} + c$

(12) $\int \tfrac{1}{\sin^2 x} \, dx = -1/\tan x + c$

(13) $\int \cos^2 x \, dx = \tfrac{2x + \sin 2x}{4} + c$

(14) $\int \tfrac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$

(15) $\int \sin ax \sin bx \, dx = -\tfrac{\sin(ax+bx)}{2(a+b)} + \tfrac{\sin(ax-bx)}{2(a-b)} + c$

(16) $\int \sin ax \cos bx \, dx = -\tfrac{\cos(ax+bx)}{2(a+b)} - \tfrac{\cos(ax-bx)}{2(a-b)} + c$

(17) $\int \cos ax \cos bx \, dx = \tfrac{\sin(ax+bx)}{2(a+b)} + \tfrac{\sin(ax-bx)}{2(a-b)} + c$

For de tre integralene ovenfor må $a^2 \neq b^2$

(18) $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \tfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + c$

(19) $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \tfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + c$

(20) $\int \tan x \, dx = \ln|1/\cos x| + c$

(21) $\int 1/\tan x \, dx = \ln|\sin x| + c$

(22) $\int 1/\cos x \, dc = \ln|\tan x + 1/\cos x| + c$

(23) $\int 1/\sin x \, dx = -\ln|1/\tan x + 1/\sin x| + c$

(24) $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$

(25) $\int a^x \, dx = \tfrac{1}{\ln a} a^x + c$

(26) $\int e^x \, dx = e^x + c$

(27) $\int e^{ax} \, dx = \tfrac{1}{a} e^{ax} + c$

(28) $\int xe^x \, dx = (x-1)e^x + c$

(29) $\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - \int x^{n-1} e^x \, dx + c$

(30) $\int xe^{\frac{1}{2}x^2} \, dx = e^{\frac{1}{2}x^2} + c$

(31) $\int \tfrac{dx}{a^2+x^2} = \tfrac{1}{a} \tan^{-1}\left(\tfrac{x}{a}\right) + c$

(32) $\int \tfrac{dx}{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2a} \ln\left|\tfrac{a+x}{a-x}\right| + c$

(33) $\int \tfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + c$

(34) $\int \tfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\tfrac{x}{a}\right) + c$

(35) $\int \tfrac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$

(36) $\int \tfrac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\tfrac{1}{\tan x} + c$

(37) $\int \tfrac{u'}{u} \, dx = \ln|u| + c, \quad u(x) > 0$

(38) $\int u \, dv = uv - \int v \, du + c$

(39) $\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$

(40) $\tfrac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt = f(v(x)) \tfrac{dv}{dx} - f(u(x)) \tfrac{du}{dx}$

(41) $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du$ med $u = g(x)$

# Laplacetransformasjon

| $f(t)$ | $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ |
|---|---|
| $f(t)$ | $F(s)$ |
| $af(t) + bg(t)$ | $aF(s) + bG(s)$ |
| $f'$ | $sF(s) - f(0)$ |
| $f''$ | $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ |
| $f^{(n)}$ | $s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$ |
| $f(t-a)u(t-a)$ | $e^{-as}F(s)$ |
| $e^{at}f(t)$ | $F(s-a)$ |
| $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ | $\frac{1}{s}F(s)$ |
| $tf(t)$ | $-F'(s)$ |
| $\frac{f(t)}{t}$ | $\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$ |

Omforming av uttrykk ved parallellforskyving:

$$e^{at}f(t) \quad \longleftrightarrow \quad f(t) \quad \longleftrightarrow \quad F(s) \quad \longleftrightarrow \quad F(s-a)$$

$$f(t-a)u(t-a) \quad \longleftrightarrow \quad f(t) \quad \longleftrightarrow \quad F(s) \quad \longleftrightarrow \quad e^{-as}F(s)$$

| $f(t) \quad \longrightarrow$ | $F(s)$ | | $F(s) \quad \longrightarrow$ | $f(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ | 1 | $\frac{1}{s}$ | $1$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | 2 | $\frac{1}{s^n}$ | $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ | 3 | $\frac{1}{s-a}$ | $e^{at}$ |
| $t^ne^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ | 4 | $\frac{1}{(s-a)^n}$ | $\frac{1}{(n-1)!}(t^{n-1}e^{at})$ |
| $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | 5 | $\frac{1}{s^2+\omega^2}$ | $\frac{1}{\omega}\sin\omega t$ |
| $\cos\omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | 6 | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\cos\omega t$ |
| $t\sin\omega t$ | $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ | 7 | $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$ | $\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$ |
| $t\cos\omega t$ | $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ | 8 | $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ | $t\cos\omega t$ |
| $t^2\sin\omega t$ | $\frac{2\omega(3s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}$ | 9 | $\frac{3s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^3}$ | $\frac{t^2}{2\omega}\sin\omega t$ |
| $t^2\cos\omega t$ | $\frac{2s(s^2-3\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}$ | 10 | $\frac{s(s^2-3\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}$ | $\frac{t^2}{2}\cos\omega t$ |
| $t^n\sin\omega t$ | $-\frac{\mathrm{Im}\big(n!(s-ik)^{n+1}\big)}{(s^2+k^2)^{n+1}}$ | 11 | $-\frac{\mathrm{Im}\big(n!(s-ik)^{n+1}\big)}{(s^2+k^2)^{n+1}}$ | $t^n\sin\omega t$ |
| $t^n\cos\omega t$ | $\frac{\mathrm{Re}\big(n!(s+ik)^{n+1}\big)}{(s^2+k^2)^{n+1}}$ | 12 | $\frac{\mathrm{Re}\big(n!(s+ik)^{n+1}\big)}{(s^2+k^2)^{n+1}}$ | $t^n\cos\omega t$ |
| $e^{at}\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ | 13 | $\frac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$ | $\frac{1}{\omega}e^{at}\sin\omega t$ |
| $e^{at}\cos\omega t$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ | 14 | $\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ | $e^{at}\cos\omega t$ |
| $e^{at}t\sin\omega t$ | $\frac{2\omega(s-a)}{((s-a)^2+\omega^2)^2}$ | 15 | $\frac{s-a}{((s-a)^2+\omega^2)^2}$ | $e^{at}\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$ |
| $e^{at}t\cos\omega t$ | $\frac{(s-a)^2-\omega^2}{((s-a)^2+\omega^2)^2}$ | 16 | $\frac{(s-a)^2-\omega^2}{((s-a)^2+\omega^2)^2}$ | $e^{at}t\cos\omega t$ |
| $e^{at}t^2\sin\omega t$ | $\frac{2\omega(3(s-a)^2-\omega^2)}{((s-a)^2+\omega^2)^3}$ | 17 | $\frac{3(s-a)^2-\omega^2}{((s-a)^2+\omega^2)^3}$ | $e^{at}\frac{t^2}{2\omega}\sin\omega t$ |
| $e^{at}t^2\cos\omega t$ | $\frac{2(s-a)((s-a)^2-3\omega^2)}{((s-a)^2+\omega^2)^3}$ | 18 | $\frac{(s-a)((s-a)^2-3\omega^2)}{((s-a)^2+\omega^2)^3}$ | $e^{at}\frac{t^2}{2}\cos\omega t$ |
| $2\sqrt{t/\pi}$ | $\frac{1}{s^{3/2}}$ | 19 | $\frac{1}{s^{3/2}}$ | $2\sqrt{t/\pi}$ |
| $\sin kt\sinh kt$ | $\frac{2k^2s}{s^4+4k^4}$ | 20 | $\frac{s}{s^4+4k^4}$ | $\frac{1}{2k^2}\sin kt\sinh kt$ |
| $\delta(t-a)$ | $e^{-as}$ | 21 | $e^{-as}$ | $\delta(t-a)$ |
| $u(t-a)$ | $\frac{1}{s}e^{-as}$ | 22 | $\frac{1}{s}e^{-as}$ | $u(t-a)$ |

Hvis $f(t)$ er en periodisk funksjon med periode $T > 0$, $D_f = [0,\infty\rangle$ og $V_f = \mathbb{R}$, så er

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-sr} f(t)\,dt}{1 - e^{-sT}}$$