MA-128 Kalkulus formelsamling versjon 8

1. Kvadratsetning:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Kvadratsetning:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Konjugatsetningen:	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Andregradslikningen:	$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Fullstendig kvadrat:	$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

Trigonometriske identiteter

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\csc x = 1/\sin x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\sec x = 1/\cos x$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	$\cot x = 1/\tan x$
$= 1 - \cos^2 x$	$\sin x = \sin(x + 2\pi n)$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	$\cos x = \cos(x + 2\pi n)$
$= 1 - \sin^2 x$	$\tan x = \tan(x + 2\pi n)$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$ (odde)
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos(-x) = \cos x$ (jevn)
$= 2\cos^2 x - 1$	$\tan(-x) = -\tan x$ (odde)
$= 1 - 2\sin^2 x$	$\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$
$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$	$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

Potenser og røtter

$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{\text{n ganger}}$	$\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$	$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$
$a^0 = 1$	$(a^b)^c = a^{b\cdot c}$	$\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$
$1^a = 1$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^c = \dfrac{a^c}{b^c}$	$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
$a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$	$(a\cdot b)^c = a^c \cdot b^c$	$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$\dfrac{1}{a^b} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^b$	$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$	$\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$	$\sqrt{a^2\cdot b} = \lvert a\rvert\sqrt{b}$

Skivemetoden med hull

$$V = \pi \int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2\right] dx$$

Sylinderskallmetoden

$$V = 2\pi \int_a^b \begin{pmatrix}\text{skall}\\ \text{radius}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{skall}\\ \text{høyde}\end{pmatrix} dx$$

Kurvelengden til $y = f(x) \quad a \le x \le b$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Newtons metode

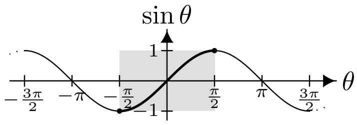
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

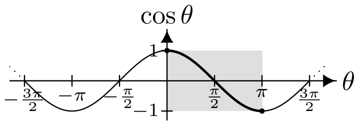
Logaritmer

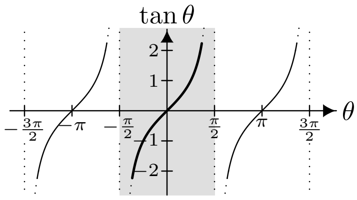
$\ln xy = \ln x + \ln y$	$\ln 1 = 0$
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln x^y = y \ln x$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Funksjonsverdier av spesielle vinkler

θ	grader	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$		
0	$0°$	0	1	0		
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1		
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$		
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	$\pm\infty$		
$\frac{2\pi}{3}$	$120°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$		
$\frac{3\pi}{4}$	$135°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1		
$\frac{5\pi}{6}$	$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
π	$180°$	0	-1	0		
$\frac{7\pi}{6}$	$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		
$\frac{5\pi}{4}$	$225°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1		
$\frac{4\pi}{3}$	$240°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\theta - 2\pi$	grader
$\frac{3\pi}{2}$	$270°$	-1	0	$\pm\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	$-90°$
$\frac{5\pi}{3}$	$300°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-60°$
$\frac{7\pi}{4}$	$315°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\pi}{4}$	$-45°$
$\frac{11\pi}{6}$	$330°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-30°$
2π	$360°$	0	1	0	0	$0°$







Derivasjon

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\sin x)' = \cos x$
$(cu)' = cu'$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(u+v)' = u' + v'$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$
	$(g(u))' = g'(u)u'$

Integrasjon

$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$
$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c$
$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$	$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
$\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$	$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = \left. f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx$$

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

Momenter, masse og massesenter til en tynn plate

Massesenter til en "stripe"	$(\tilde{x}, \tilde{y})$
Massetettetsfunksjon	δ
Massen til en stripe	$dm = \delta\cdot$lengde$\cdot$bredde
Moment om x-aksen	$M_x = \int \tilde{y}\, dm$
Moment om y-aksen	$M_y = \int \tilde{x}\, dm$
Massen til plata	$M = \int dm$
Massesenter til plata	$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M}$

stripe || x-aksen $\Leftrightarrow$ $\tilde{y} = y$, bredde $= dy$

stripe || y-aksen $\Leftrightarrow$ $\tilde{x} = x$, bredde $= dx$

Mengder

En **mengde** er en samling av **elementer**. Følgende notasjon kan brukes, der S og T er mengder:

$a \in S$	a er element i S
$a \notin S$	a er ikke element i S
$S \cup T$	Unionen av S og T (inneholder alle elementer i S og T til sammen)
$S \cap T$	Snittet av S og T (inneholder alle elementer felles for S og T)
$\emptyset$	Den tomme mengden (inneholder ingen elementer)
$S \subseteq T$	S er en **delmengde** av T (T inneholder minst alle elementene til S)

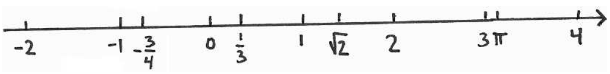
Tall

Tall kan defineres som mengdene $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ slik:

$$\begin{aligned}
\text{Naturlige tall } \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \ldots\} \\
\text{Hele tall } \mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\
\text{Positive heltall } \mathbb{N}^+ &= \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\text{Negative heltall } \mathbb{Z}^- &= \{-1, -2, -3, \ldots\} \\
\text{Rasjonale tall } \mathbb{Q} &= \frac{a}{b} \quad \text{der } a, b \in \mathbb{Z} \text{ og } b \neq 0 \\
\text{Irrasjonale tall} &= \text{Tall uten periodisk} \\
&\quad\ \text{desimalutvikling} \\
\text{Reelle tall } \mathbb{R} &= \text{Rasjonale og irrasjonale tall}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{N}^+ \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Tall kan beskrives geometrisk som punkter på en tallinje:



Intervaller

En delmengde av tallinja kalles et **intervall** om den inneholder minst to tall og inneholder alle reelle tall mellom to vilkårlige elementer i delmengden. Et linjesegment av tallinja er et **endelig intervall**. Et ubegrenset område av tallinja er et **uendelig intervall**. Et intervall er **lukket** om det inneholder begge **endepunktene**, **åpent** om det ikke inneholder noen endepunkter og **halvåpent** om det inneholder ett av endepunktene men ikke det andre. Punkter i intervallet som ikke er endepunkter kalles **indre punkter**. Vi har følgende typer intervaller:

Notasjon	Mengde	Type
$\langle a, b\rangle$	$\{x \mid a < x < b\}$	Åpent, endelig
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	Lukket, endelig
$[a, b\rangle$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	Halvåpent, endelig
$\langle a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	Halvåpent, endelig
$\langle a, \infty\rangle$	$\{x \mid x > a\}$	Åpent, uendelig
$[a, \infty\rangle$	$\{x \mid x \geq a\}$	Lukket, uendelig
$\langle -\infty, b\rangle$	$\{x \mid x < b\}$	Åpent, uendelig
$\langle -\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	Lukket, uendelig
$\langle -\infty, \infty\rangle$	$\mathbb{R}$	Åpent, lukket, uendelig

Ulikheter

Hvis $a, b, c \in \mathbb{R}$ så har vi:

$$\begin{aligned}
a < b \quad &\Rightarrow \quad a + c < b + c \\
a < b \quad &\Rightarrow \quad a - c < b - c \\
a < b \text{ og } c > 0 \quad &\Rightarrow \quad ac < bc \\
a < b \text{ og } c < 0 \quad &\Rightarrow \quad ac > bc \\
a < b \quad &\Rightarrow \quad -a > -b \\
a > 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{a} > 0 \\
a > 0 \text{ og } b > 0 \quad &\Rightarrow \quad a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\
a < 0 \text{ og } b < 0 \quad &\Rightarrow \quad a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

Absoluttverdi

Hvis $a, b, x \in \mathbb{R}$ så har vi:

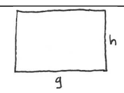
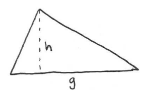
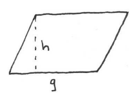
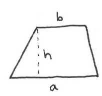
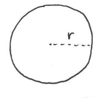
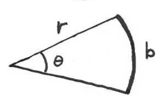
$$|x| = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
|-a| &= |a| \\
|-a| &\neq -|a| \\
|ab| &= |a||b| \\
\left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|} \\
|a + b| &\leq |a| + |b| \qquad \text{(trekantulikheten)}
\end{aligned}$$

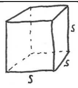
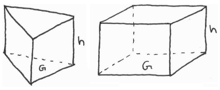
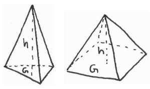
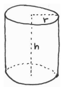
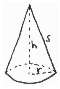
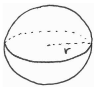
Hvis $a > 0$ har vi:

$$\begin{aligned}
|x| = a &\quad \text{hvis og bare hvis} \quad x = \pm a \\
|x| < a &\quad \text{hvis og bare hvis} \quad -a < x < a \\
|x| > a &\quad \text{hvis og bare hvis} \quad x > a \text{ eller } x < -a \\
|x| \leq a &\quad \text{hvis og bare hvis} \quad -a \leq x \leq a \\
|x| \geq a &\quad \text{hvis og bare hvis} \quad x \geq a \text{ eller } x \leq -a
\end{aligned}$$

Geometriske figurer i planet

Figur	Areal		Omkrets
Rektangel	gh		$2(g+h)$
Trekant	$\frac{gh}{2}$		
Parallellogram	gh		
Trapes	$\frac{(a+b)h}{2}$		
Sirkel	πr^2		$2\pi r$
Sektor	$\frac{br}{2} = \pi r^2 \theta$		$b = 2\pi r \theta$

Geometriske figurer i rommet

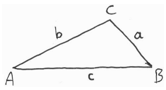
Figur	Volum		Overflate
Kube	s^3		$6s^2$
Prisme	Gh		
Pyramide	$\frac{Gh}{3}$		
Sylinder	$\pi r^2 h$		$2\pi r(r+h)$
Kjegle	$\frac{\pi r^2 h}{3}$		$\pi r(r+s)$
Kule	$\frac{4\pi r^3}{3}$		$4\pi r^2$

For vilkårlige trekanter i planet gjelder

Areal = $\frac{1}{2}bc\sin A$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

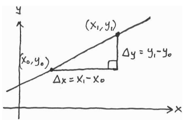
$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$



Linjer i planet

Stigningstallet m til en ikkevertikal linje gjennom punktene (x_0, y_0) og (x_1, y_1) er definert som

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



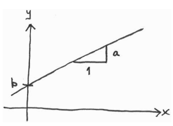
En linje med stigningstall m som går gjennom punktet (x_1, y_1) kan beskrives med likningen

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

En horisontal linje gjennom punktet (x_1, y_1) kan derfor beskrives med likningen $y = y_1$. En vertikal linje gjennom punktet (x_1, y_1) kan beskrives med likningen $x = x_1$.

En linje med stigningstall m og konstantledd b kan beskrives med likningen

$$y = mx + b$$



Alle linjer kan skrives på normalformen

$$Ax + By = C$$

der A og B ikke begge er lik null.

Hvis to ikke-vertikale linjer L_1 og L_2 står vinkelrett på hverandre, så vil deres stigningstall m_1 og m_2 tilfredsstille likningen $m_1 m_2 = -1$, dvs:

$$m_1 = \frac{1}{m_2} \qquad \text{og} \qquad m_2 = \frac{1}{m_1}$$

Avstanden mellom punktene (x_0, y_0) og (x_1, y_1) er

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Parabler

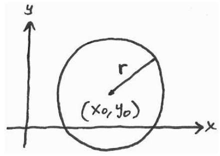
Grafen til likningen $y = ax^2 + bx + c$ der $a \neq 0$ er en parabel som er åpen i toppen når $a > 0$ og åpen i bunnen når $a < 0$. Parabelens akse er linjen

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Sirkel

En sirkel med radius r er mengden av alle punktene hvis avstanden fra et sentrum (x_0, y_0) er lik a. Dette kan beskrives med likningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Andregradslikningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

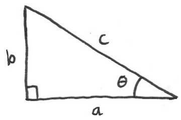
Hvis $x = x_0$ og $x = x_1$ er løsninger av $ax^2 + bx + c = 0$, så har vi følgende:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$$
$$x_0 + x_1 = -\frac{b}{a}$$
$$x_0 \cdot x_1 = \frac{c}{a}$$

Pytagoras' setning

I en rettvinklet trekant med katetlengder a og b og hypotenuslengde c så har vi

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Funksjoner

En funksjon fra en mengde D til en mengde Y er en regel som tilordner ett (unikt) element $f(x) \in Y$ til hvert element $x \in D$. Mengden D med alle mulige inputverdier kalles **definisjonsmengden** til funksjonen. Mengden av alle verdiene til $f(x)$ når x varierer gjennom hele D kalles **verdimengden** til funksjonen.

Polynomer

En funksjon $p(x)$ er et **polynom** hvis

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (og kalles koeffisientene) til polynomet. Alle polynomer har definisjonemengde $\langle -\infty, \infty \rangle$. n kalles **graden** av polynomet.

Rasjonale funksjoner

En rasjonal funksjon er et forhold mellom to polynomer:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

der p og q er polynomer. Definisjonsmengden til en rasjonal funksjon er mengden av alle $x \in \mathbb{R}$ der $q(x) \neq 0$.

Proporsjonalitet

To variable x og y er proporsjonale til hverandre hvis den ene alltid er en konstant multippel av den andre, dvs:

$$y = kx$$

for en eller annen konstant $k \neq 0$.

Sammensatte funksjoner

Hvis f og g er funksjoner, så er den sammensatte funksjonen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Definisjonsmengden til $f \circ g$ består av tallene x i definisjonsmengden til g der $g(x)$ ligger i definisjonsmengden til f.

Flytting/modifisering av grafer

En graf kan flyttes vertikalt ved å legge til en konstant k: Hvis $k > 0$ så har vi:

$f(x)+k$	Flytter grafen til f opp lengden k
$f(x)-k$	Flytter grafen til f ned lengden k
$f(x+k)$	Flytter grafen til f lengden k mot venstre
$f(x-k)$	Flytter grafen til f lengden k mot høyre

Hvis $k > 1$ så har vi:

$kf(x)$	Strekker grafen til f vertikalt med faktoren k
$\frac{1}{k}f(x)$	Trykker grafen til f vertikalt med faktoren k
$f(kx)$	Trykker grafen til f horisontalt med faktoren k
$f(x/k)$	Strekker grafen til f horisontalt med faktoren k

Hvis $k = -1$ så har vi:

$kf(x) = -f(x)$	Speiler grafen til f gjennom x-aksen
$f(kx) = f(-x)$	Speiler grafen til f gjennom y-aksen

Jevne og odde funksjoner

En funksjon $y = f(x)$ er en

jevn funksjon av x hvis $f(-x) = f(x)$,
odde funksjon av x hvis $f(-x) = -f(x)$,

for hver x i funksjonens definisjonsmengde. Jevne funksjoner er symmetriske om y-aksen. Odde funksjoner er symmetriske om origo.

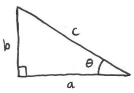
Trigonometri

En vinkel n° i grader kan regnes om til en vinkel θ i radianer med formelen

$$\theta = \frac{n^\circ}{180^\circ}\pi$$

De triginometriske funksjonene relateres til sidelengdene i en rettvinklet trekant på følgende måte:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \tfrac{b}{c} & \csc\theta &= \tfrac{1}{\sin\theta} = \tfrac{c}{b} \\ \cos\theta &= \tfrac{a}{c} & \sec\theta &= \tfrac{1}{\cos\theta} = \tfrac{c}{a} \\ \tfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta &= \tfrac{b}{a} & \cot\theta &= \tfrac{1}{\tan\theta} = \tfrac{a}{b} \end{aligned}$$



Harmoniske svingninger

kan modelleres med funksjonen

$$\begin{aligned} f(x) &= a\sin cx + b\cos cx + d \\ &= A\sin(cx+\varphi) + d \end{aligned}$$

Periode: $\frac{2\pi}{c}$ Likevektslinje: $y = d$
Amplitude: $A = \sqrt{a^2+b^2}$ $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

Grenseverdier

Hvis $L, M, c, k \in \mathbb{R}$ og

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{og} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \text{ så}$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L + M$$
$$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L - M$$
$$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L \cdot M$$
$$\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$$
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

Hvis $r, s \in \mathbb{N}$, ikke har noen felles faktor og $s \neq 0$, så

$$\lim_{x\to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

gitt at $L^{r/s} \in \mathbb{R}$. (Hvis s er et partall, antar vi $L > 0$).

Hvis $\lim_{x\to c}\ln f(x) = L$, da er

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} e^{\ln f(x)} = e^L$$

Merk at disse reglene også er gyldige når $c = \pm\infty$.

Grenseverdien til polynomer

Hvis $p(x)$ er et polynom, så er

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

Grenseverdien til rasjonale funksjoner

Hvis $p(x)$ og $q(x)$ er polynomer og $q(c) \neq 0$, så er

$$\lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$$

Sandwichteoremet

Anta at $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for alle x i et åpent intervall som inneholder c, utenom muligens ved $x = c$. Anta i tillegg at

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L.$$

Da vil også

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Venstre og høyre grenseverdier

En funksjon $f(x)$ har en grenseverdi når x går mot c hvis og bare hvis den har venstre og høyre grenseverdier der og disse grenseverdiene er like:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{og} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

Horisontal asymptote

En linje $y = b$ er en **horisontal asymptote** av grafen til en funksjon $y = f(x)$ hvis enten

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Skråasymptote

Hvis graden til telleren i en rasjonal funksjon $f(x)$ er en høyere enn graden til nevneren så har grafen til funksjonen en **skråasymptote**. Ved å dele telleren på nevneren ved polynomdivisjon får vi uttrykt den rasjonale funksjonen som en lineær funksjon av x pluss et restledd med x i nevneren. Den lineære delen er funksjonen for skråasymptoten.

Vertikal asymptote

En linje $x = a$ er en **vertikal asymptote** av grafen til en funksjon $y = f(x)$ hvis enten

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Noen vanlige grenseverdier

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ i radianer})$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (\text{for alle } x)$$

Kontinuitet

En funksjon $f(x)$ er **kontinuerlig** ved $x = c$ hvis og bare hvis følgende tre krav er oppfyllt:

1.	$f(c)$ finnes	(c er i definisjonsmengden til f)
2.	$\lim_{x\to c} f(x)$ finnes	(f har en grense når $x \to c$)
3.	$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$	(grenseverdien er lik $f(c)$)

Kontinuerlig funksjon

En funksjon er kontinuerlig på et intervall hvis og bare hvis den er kontinuerlig på alle punktene i intervallet. En **kontinuerlig funksjon** er en funksjon som er kontinuerlig på alle punktene i funksjonens definisjonsmengde. En funksjon trenger ikke være kontinuerlig på alle intervaller. F.eks. $y = 1/x$ er ikke kontinuerlig i intervallet $[-1, 1]$, men er kontinuerlig i definisjonsmengden $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Egenskaper til kontinuerlige funksjoner

Hvis funksjonene f og g er kontinuerlige ved $x = c$, da er følgende kombinasjoner også kontinuerlige ved $x = c$:

Summer	$f + g$
Differanser	$f - g$
Produkter	$f \cdot g$
Konstante multipler	$k \cdot f$, for alle tall k
Kvotienter	f/g, gitt at $g(c) \neq 0$
Potenser	$f^{r/s}$, gitt at $f^{r/s}$ er definert på et åpent intervall som inneholder c og $r, s \in \mathbb{N}$
Sammensatte funksjoner	$f \circ g = f(g(x))$

Mellomverdisetningen (Intermediate value theorem)

En funksjon $y = f(x)$ som er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$ antar alle verdier mellom $f(a)$ og $f(b)$. Dvs at hvis y_0 er en hvilken som helst verdi mellom $f(a)$ og $f(b)$, så er $y_0 = f(c)$ for en eller annen $c \in [a, b]$.

Stigningstallet til en kurve på et punkt

Stigningstallet til en kurve $y = f(x)$ på punktet $P(x_0, f(x_0))$ er tallet

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(gitt at denne finnes)}$$

Tangenten til kurven ved P er linjen gjennom P med dette stigningstallet.

Derivasjon

Den **deriverte** til funksjonen $f(x)$ med hensyn på variabelen x er funksjonen f' hvis verdi ved x er

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

gitt at denne grenseverdien finnes. Det er mange måter å skrive den deriverte på. Her er noen vanlige alternativer:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Deriverbarhet impliserer kontinuitet

Hvis f er deriverbar ved $x = c$ så betyr det at f også er kontiunerlig ved $x = c$ (men ikke nødvendigvis motsatt).

Darboux' teorem

Hvis a og b er to vilkårlige punkter i et intervall der f er deriverbar, så vil f' anta alle verdier mellom $f'(a)$ og $f'(b)$.

Derivert som endringshastighet

Øyeblikkelig endringshastighet til f med hensyn på x ved x_0 er den deriverte til f ved x_0, $f'(x_0)$. Hvis da $s = f(t)$ er funksjonen for posisjonen s med hensyn på tiden t, så har vi følgende:

$s(t) = f(t)$	posisjon
$v(t) = s'(t)$	fart
$a(t) = v'(t) = s''(t)$	akselerasjon
$j(t) = a'(t) = v''(t) = s^{(3)}(t)$	rykk

Analyse av funksjoner med derivasjon

Ekstremverdier

La f være en funksjon med definisjonsmengde D. Da har f en **global maksimum**sverdi på D ved et punkt c hvis

$$f(x) \le f(c) \qquad \text{for alle } x \text{ i } D$$

og en **global minimum**sverdi på D ved c hvis

$$f(x) \ge f(c) \qquad \text{for alle } x \text{ i } D.$$

Hvis f er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$, da vil f ha både en absolutt maksimumsverdi M og en absolutt minimumsverdi m i $[a, b]$. Dvs, det finnes to tall x_1 og x_2 i $[a, b]$ der $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ og $m \le f(x) \le M$ for alle andre x-verdier i $[a, b]$.

Lokale maks og min

En funksjon f har en lokal maksimumsverdi ved et indre punkt c i definisjonsmengden hvis

$$f(x) \le f(c) \quad \text{for alle } x \text{ i et åpent intervall som inneholder } c.$$

En funksjon f har en lokal minimumsverdi ved et indre punkt c i definisjonsmengden hvis

$$f(x) \ge f(c) \quad \text{for alle } x \text{ i et åpent intervall som inneholder } c.$$

Globale ekstremverdier er også lokale ekstremverdier, men ikke nødvendigvis motsatt.

Førstederivert testen for lokale ekstremverdier

Hvis f har en lokal maksimums- eller minimumsverdi ved et indre punkt c i definisjonsmengden, og f' er definert ved c, så er

$$f'(c) = 0$$

Kritisk punkt

Et indre punkt i definisjonsmengden til en funksjon f der f' er null eller udefinert kalles et **kritisk punkt** på f.

Globale ekstrempunkt på et endelig lukket intervall

til en kontinuerlig funksjon f finner man ved å

1. Regne ut f ved alle kritiske punkter og endepunkter.
2. Ta den største og den minste verdien av disse.

Rolles teorem

Anta at $y = f(x)$ er kontinuerlig på alle punkter i det lukkede intervallet $[a, b]$ og deriverbar på alle punkter i det åpne intervallet (a, b). Hvis

$$f(a) = f(b),$$

da finnes det minst ett tall c i (a, b) hvor

$$f'(c) = 0$$

Middelverditeoremet (Mean Value Theorem)

Anta at $y = f(x)$ er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$ og deriverbar på alle punkter i det åpne intervallet (a, b). Da finnes det minst et punkt c i (a, b) hvor

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Funksjoner med null som derivert er konstante

Hvis $f'(x) = 0$ ved alle punkter x i et åpent intervall (a, b), da er $f(x) = C$ for alle $x \in (a, b)$, der C er en konstant.

Funksjoner med samme derivert avviker med en konst.

Hvis $f'(x) = g'(x)$ for alle punkter x i et åpent intervall (a, b), da finnes det en konstant C slik at $f(x) = g(x) + C$ for alle $x \in (a, b)$. Dvs, $f - g$ er en konstant på (a, b).

Økende, minkende og monotone funksjoner

La f være en funksjon definert på et intervall I og la x_1 og x_2 være to vilkårlige punkter i I. Da har vi:

1. Hvis $f(x_1) < f(x_2)$ når $x_1 < x_2$, så er f **økende** på I.
2. Hvis $f(x_1) > f(x_2)$ når $x_1 < x_2$, så er f **minkende** på I.

En funksjon som enten er økende eller minkende på I kalles **monoton** på I.

Førstederivert testen for monotone funksjoner

Anta at f er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b).
Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$, da er f økende på $[a, b]$
Hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$, da er f minkende på $[a, b]$

Førstederivert testen for lokale ekstremverdier

Anta at c er et kritisk punkt på en kontinuerlig funksjon f, og at f er deriverbar på alle punkter i et intervall som inneholder c, men ikke nødvendigvis ved c. Hvis det viser seg at, når man beveger seg forbi c fra venstre mot høyre på tallinjen, og

1. hvis f' går fra negativ til positiv ved c, da har f lokalt minimum ved c;
2. hvis f' går fra positiv til negativ ved c, da har f lokalt maksimum ved c;
3. hvis f' ikke forandrer fortegn ved c, da har ikke f lokal ekstremverdi ved c.

Konkav opp, konkav ned

Grafen til en deriverbar funksjon $y = f(x)$ er på et åpent intervall I

1. **konkav opp** hvis f' er økende på I
2. **konkav ned** hvis f' er minkende på I.

Andrederivert testen for konkavitet

La $y = f(x)$ være to ganger deriverbar på et intervall I
Hvis $f'' > 0$ på I, da er grafen til f over I konkav opp.
Hvis $f'' < 0$ på I, da er grafen til f over I konkav ned.

Vendepunkt

Et punkt der grafen til en funksjon kan ha en tangent og der konkaviteten endres, kalles et **vendepunkt**.

Andrederivert testen for lokale ekstemverdier

Anta at f'' er kontinuerlig på et åpent intervall som inneholder $x = c$.

1. Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, da har f lokalt maksimum ved $x = c$
2. Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, da har f lokalt minimum ved $x = c$
3. Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) = 0$, da feiler testen. Funksjonen f kan da enten ha lokalt maks, lokalt min, eller ingen av delene.

L'Hôpitals regel

Anta at $f(a) = g(a) = 0$, og at f og g er deriverbare på et åpent intervall I som inneholder a, og at $g'(x) \neq 0$ på I hvis $x \neq a$. Da har vi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

hvis grenseverdien til høyre finnes. Det samme gjelder om $f(x) \to \pm\infty$ og $g(x) \to \pm\infty$ når $x \to a$. Vi kan også ha $a = \pm\infty$ eller $x \to a^+$ eller $x \to a^-$.

Integrasjon

Antideriverte

En funksjon F er en **antiderivert** av f på et intervall I hvis $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in I$. Hvis F er en antiderivert av f på et intervall I, da er den mest generelle antideriverte av f på I

$$F(x) + C$$

hvor C er en vilkårlig konstant.

Ubestemt integral, integrand

Mengden av alle antideriverte av f er det **ubestemte integralet** av f med hensyn på x, og blir skrevet slik:

$$\int f(x)\,dx$$

Symbolet $\int$ er et **integraltegn**. Funksjonen f er **integranden** til integralet, og x er **integrasjonsvariabelen**.

Bestemt integral

Hvis en funksjon $y = f(x)$ er ikkenegativ og integrerbar over et lukket intervall $[a, b]$, da er arealet mellom kurven $y = f(x)$ og x-aksen over $[a, b]$ integralet av f fra a til b,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)\,dx$$

Gjennomsnittsverdien til en funksjon

Hvis f er integrerbar på $[a, b]$, da er gjennomsnittsverdien til f på $[a, b]$ lik

$$gj(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Middelverditeoremet for bestemte integraler

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$, da finnes det et punkt c i $[a, b]$ hvor

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Kalkulusens fundamentalteorem

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$, da er $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på $\langle a, b\rangle$, og dens deriverte er $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Hvis f er kontinuerlig på alle punkter i $[a, b]$, og F er en vilkårlig antiderivert av f på $[a, b]$, da har vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Subtitusjonsregelen for ubestemte integral

Hvis $u = g(x)$ er en deriverbar funksjon hvis verdimengde er et intervall I og f er kontinuerlig på I, da har vi

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Subtitusjonsregelen for bestemte integral

Hvis g' er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ og f er kontinuerlig på verdimengen til g, da har vi

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Spesialtilfeller når f er jevn eller odde

La f være kontinuerlig på intervallet $[-a, a]$, da har vi

$$\text{Hvis } f \text{ er jevn, da er } \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\text{Hvis } f \text{ er odde, da er } \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Arealet mellom kurver

Hvis f og g er kontinuerlige og $f(x) \geq g(x)$ i $[a, b]$, da er arealet av området mellom kurvene $y = f(x)$ og $y = g(x)$ fra a til b integralet av $(f - g)$ fra a til b:

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx$$

Bruksområder til bestemte integraler

Volum

Volumet av et legeme med et kjent integrerbart tversnittareal $A(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ er integralet av A fra a til b:

$$V = \int_{a}^{b} A(x)\,dx$$

Omdreiningslegeme; skivemetoden uten hull

$$V = \pi \int_{a}^{b} (R(x))^2\,dx$$

Kurvelengde til $x = g(y)$ $\quad c \leq y \leq d$

Hvis g er kontinuerlig og deriverbar på $[c, d]$, da er lengden av kurven (grafen) $x = g(y)$ fra $y = c$ til $y = d$ lik

$$L = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + (g'(y))^2}\,dy$$

Moment, masse og massesenter til en tynn stang langs x-aksen med tetthetsfunksjon $\delta(x)$

$$\begin{aligned} \text{Moment om origo} \quad & M_0 = \textstyle\int_a^b x\delta(x)\,dx \\ \text{Masse} \quad & M = \textstyle\int_a^b \delta(x)\,dx \\ \text{Massesenter} \quad & \overline{x} = \tfrac{M_0}{M} \end{aligned}$$

Transcendente funksjoner

Enentydig funksjon

En funksjon $f(x)$ er **enentydig** (eller **injektiv**) på en definisjonsmengde D hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ når $x_1 \neq x_2$ i D.

Horisontallinjetesten for enentydige funksjoner

En funksjon $y = f(x)$ er enentydig hvis og bare hvis grafen skjærer enhvær horisontal linje høyest ett sted.

Invers funksjon

Anta at f er en enentydig funksjon på en definisjonsmengde D med verdimengde R. Den **inverse funksjonen** f^{-1} er definert ved

$$f^{-1}(a) = b \quad \text{hvis} f(b) = a$$

Definisjonsmengden til f^{-1} er R og verdimengden til f^{-1} er D.

Resiprok

Om et tall $a \in \mathbb{R}$ ikke er lik null, kan vi finne en delt på tallet, nemlig $\frac{1}{a}$. Dette tallet kalles da a's **resiprok**.

Den deriverte av en invers funksjon

Hvis f har et intervall I som definisjonsmengde og $f'(x)$ finnes og aldri er null på I, da er f^{-1} deriverbar på alle punkter i dens definisjonsmengde. Verdien til $(f^{-1})'$ ved et punkt b i definisjonsmengden til f^{-1}, er resiproken til verdien til f' ved punktet $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

eller

$$\left.\frac{d\,f^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{d\,f}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

Den naturlige logaritmen $\ln x$

$$\ln x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0$$

Det naturlige tallet e

Tallet e er det tallet i definisjonsmengden til den naturlige logaritmen som tilfredsstiller likningen

$$\ln(e) = 1$$

Egenskaper til logaritmer

For vilkårlige tall $a > 0$ og $x > 0$, så gjelder følgende regler:

$$\begin{aligned} \ln ax &= \ln a + \ln x && \text{produktregelen} \\ \ln \frac{a}{x} &= \ln a - \ln x && \text{kvotientregelen} \\ \ln \frac{1}{x} &= -\ln x && \text{resiprokregelen} \\ \ln x^r &= r \ln x && \text{potensregelen} \end{aligned}$$

Den naturlige eksponentialfunksjonen e^x

For alle $x \in \mathbb{R}$, så er den inverse funksjonen til $\ln x$ lik e^x:

$$e^x = \ln^{-1} x = \exp x$$

Dette fører til at

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x && \text{for alle } x > 0 \\ \ln(e^x) &= x && \text{for alle } x \end{aligned}$$

Generelle eksponentialfunksjoner

For alle tall $a > 0$ og x, så har vi

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Generelle logaritmefunksjoner

For alle positive tall $a \neq 1$, så er

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{den inverse funksjonen av} \quad a^x$$

Dette fører til at

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x \qquad \text{for alle } x > 0 \\ \log_a(a^x) &= x \qquad \text{for alle } x \end{aligned}$$

Malthus' lov for eksponentiell vekst

Om man antar at øyeblikkelig endringshastighet til en størrelse er proporsjonal med størrelsen får man differensiallikningen

$$\frac{d}{dt} y(t) = ky$$

Hvis $y = y_0$ når $t = 0$ så er løsningen på denne likningen

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

der $k > 0$ gir "vekst" og $k < 0$ gir "nedgang". k kalles vekstfaktoren. Funksjonen kan brukes til å modellere f.eks. ubegrenset vekst eller radioaktiv nedbrytning.

Vekstrater når $x \to \infty$

La $f(x)$ og $g(x)$ være positive for tilstrekkelig store x. Hvis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

eller, tilsvarende, om

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

så sier vi at f **vokser raskere enn** g, evt at g **vokser seinere enn** f. Hvis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad \text{(et endelig tall)}$$

så sier vi at f og g har **samme vekstrate** når $x \to \infty$.

Inverse trigonometriske funksjoner

$$\begin{aligned} &y = \sin^{-1} x \quad && \text{er tallet i } [-\pi/2, \pi/2] \text{ der } \sin y = x \\ &y = \cos^{-1} x \quad && \text{er tallet i } [0, \pi] \text{ der } \cos y = x \\ &y = \tan^{-1} x \quad && \text{er tallet i } \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \text{ der } \tan y = x \end{aligned}$$

Inverse trigonometriske identiteter

$$\begin{aligned} \cos^{-1} x &= \pi/2 - \sin^{-1} x \\ \cot^{-1} x &= \pi/2 - \tan^{-1} x \\ \csc^{-1} x &= \pi/2 - \sec^{-1} x \end{aligned}$$

Numerisk integrasjon

Trapesmetoden

Et bestemt integral av f fra a til b kan approksimeres ved å stykke opp intervallet i n like store lengder, og summere arealet av trapesene fra x-aksen til f. Bredden på hvert trapes blir $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Summen av trapesarealene blir da

$$T = \frac{\Delta x}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\Delta x) + f(b) \right)$$

Simpsons metode

$$S = \frac{\Delta x}{3} \left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n \right)$$

Der y'ene er verdier av f ved partisjonspunktene

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b.$$

Tallet n er et partall, og $\Delta x = (b - a)/n$.

Om dette heftet

Dette heftet er laget som en skreddersydd formelsamling til MA-128 kalkulus ved UiA i Grimstad. Mesteparten av stoffet er oversettelser av definisjoner og teoremer fra George B. Thomas (2005). Noe stoff er også inspirert av formelsamlingene fra Haugan (2007), Utdanningsdirektoratet (2001) og Wikipedia. Kommentarer og rettelser er meget velkomne, og medfører finnerlønn ved alvorlige feil.

Dette er versjon 8. Siste versjon bør ligge her:

`trondal.com/kalkulus.pdf`

 Jostein Trondal, 13. november 2008
jostein@trondal.no

Referanser

George B. Thomas, J. (2005). *Thomas' Calculus* (M. Weir, J. Hass, & F. R. Giordano, Eds.). Pearson Addison Wesley.

Haugan, J. (2007). *Formler og tabeller*. NKI Forlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2001). *Formelsamling i matematikk*. Gyldendal.