# EKSAMEN

**EMNE: MA-156**
**FAGLÆRER: Svein Olav Nyberg, Jostein Trondal**

| Klasser: Bygg | Dato: 14. mai 2014 | Eksamenstid: **$09^{\underline{00}}$ – $14^{\underline{00}}$** | |
|---|---|---|---|
| Eksamensoppgaven består av følgende: | Antall sider (ink. forside): 4 | Antall oppgaver: 3 | Antall vedlegg: 3 (Formler, polar, 3D) Totalt 9 sider |
| Tillatte hjelpemidler er: | Godkjent kalkulator<br>Formelsamlinger<br>Josteins formlesamlinger<br>Don't Panic!<br>1 selvlagd A4-ark | | |
| KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG | | | |

# 1 Om eksamen

**Mellomregninger**

Ta med mellomregninger og begrunnelser som er relevante for MA-156, slik at det er tydelig for sensor at du kjenner hele gangen i regningen. Mellomregninger som tilhører andre fag er det ikke nødvendig å ta med. Er du i tvil om mellomregningen tilhører pensum i MA-156, ta den med.

**Formler**

Det kan være lurt å oppgi hvilken formel du har brukt i overganger hvor valg av formel er viktig.

1. **Lineær algebra**

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 16 \\ 30 \end{bmatrix}$$

La videre $A = [\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, \vec{a}_3\, \vec{a}_4]$ og $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(a) Løs ligningen $x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3 + x_4 \cdot \vec{a}_4 = \vec{b}$. Vis samtlige radoperasjoner og hvordan du leser av.

(b) Invers:

i. Finn $A^{-1}$

ii. Vis at $|A| \neq 0$

iii. Er vektorene $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, og $\vec{a}_4$ lineært uavhengige? Begrunn!

(c) Determinant: La $A = [\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, \vec{a}_3\, \vec{a}_4]$. Finn $|A|$.
Oppgaven må løses for hånd, og trinnene må vises frem, så kalkulatorsvar gir 0 poeng. Godkjente metoder er kofaktorekspansjon, alle gyldige (manuelle) snarveier, og bruk av radoperasjoner.

(d) Du har to basiser for vektorrommet $V$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ og $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

i. Finn koordinatskiftematrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$

ii. $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Finn $[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$

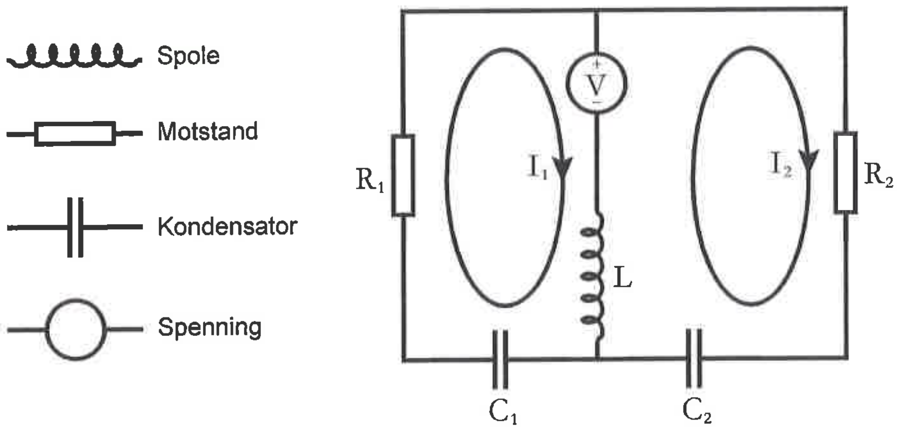
2. **Differensialligninger**

(a) Løs differensialligningen $yy' = t + \frac{1}{2}$

(b) Løs differensialligningen $y^{(3)} - 5y'' + 8y' - 6y = 0$

(c) Løs differensialligningen $y^{(3)} - 5y'' + 8y' - 6y = 2e^{3t}$; finn $y_P$ med *Variasjon av Parametre*

(d) Sett opp systemet av differensialligninger for strømmene $I_1$ og $I_2$ i følgende kretsdiagram:



3. **Linjespesifikk del for Bygg, MA-156**

$\pi$) Les dette

i) I oppgave 3 er det relevant å bruke arbeidsark for polare grafer. Det ligger to slike ark som vedlegg etter formlene; ett til kladd og ett til innlevering. Du må du TYDELIG merke arket —i SAMME HJØRNE som resten av de ordinære gjennomslagsarkene— med KANDIDATNUMMER, FAG, DATO og riktig SIDETALL.

ii) Som oppgave $\pi$) i) men for arbeidsark for 3D-grafer.

a) Kjeglesnitt

i) Finn ut av hva slags graf likningen $y^2 - 4y + 8 - x = 0$ beskriver.

ii) Lag en skisse av grafen.

b) Linjer og avstander i rommet

i) Skriv punktet $(x, y, z) = (-3, -4, -5)$ med sylindriske koordinater og med kulekoordinater.

ii) Regn ut avstanden mellom linja $l$ med posisjonsvektor $\vec{r}_1 = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ og retningsvektor $\vec{v}_1 = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, og linja $m$ med posisjonsvektor $\vec{r}_2 = 4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ og retningsvektor $\vec{v}_2 = 5\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

c) Polare koordinater

i) Tegn grafene til $r = 2\cos(\theta)$ og $r = 1$.

ii) Finn eksakt ved regning skjæringspunktene mellom grafene.

d) Analytisk geometri i tre dimensjoner

i) Koordinatene til hjørnene i trekanten ABC er $A = (2, -4, 2)$, $B = (1, 1, 5)$ og $C = (0, 0, 3)$. Finn vinkelen i hjørne A.

ii) Beskriv, og tegn en skisse av punktene i rommet definert ved:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

# MA-156 Formelsamling

## 8.1 Kjeglesnitt

Kjeglesnitt: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Linje: $Ax + By = C$

Punkt: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$

Sirkel: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Avstand i planet: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Parabel med akse || med y-aksen:

$y = ax^2 + bx + c$

Akse: $x = -\dfrac{b}{2a} = x_0$

Toppunkt: $\left(x_0, y_0 = -\dfrac{b^2}{4a} + c\right)$

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$

Brennpunkt: $\left(x_0, y_0 + \dfrac{1}{4a}\right)$

Styrelinje: $y = y_0 - \dfrac{1}{4a}$

Nullpunkter: $x = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - \dfrac{c}{a}}$

Skjæring med $y$-aksen: $y = c$

Parabel med akse || med x-aksen:

$x = ay^2 + by + c$

Akse: $y = -\dfrac{b}{2a} = y_0$

Toppunkt: $\left(x_0 = -\dfrac{b^2}{4a} + c, y_0\right)$

$x = a(y - y_0)^2 + x_0$

Brennpunkt: $\left(x_0 + \dfrac{1}{4a}, y_0\right)$

Styrelinje: $x = x_0 - \dfrac{1}{4a}$

Nullpunkter: $y = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - \dfrac{c}{a}}$

Skjæring med $x$-aksen: $x = c$

Hyperbel med brennpunkter || med x-aksen:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Senter: $(x_0, y_0)$

Senter-toppunkt $= a$

Toppunkt: $(x_0 \pm a, y_0)$

Senter-brennpunkt $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Brennpunkt: $(x_0 \pm c, y_0)$

Eksentrisitet $\varepsilon = \dfrac{c}{a} \in \langle 1, \infty \rangle$

Asymptoter: $\dfrac{x - x_0}{a} = \pm \dfrac{y - y_0}{b}$

Hyperbel med brennpunkter || med y-aksen:

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{s^2} = 1$$

Senter: $(x_0, y_0)$

Senter-toppunkt $= b$

Toppunkt: $(x_0, y_0 \pm b)$

Senter-brennpunkt $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Brennpunkt: $(x_0, y_0 \pm c)$

Eksentrisitet $\varepsilon = \dfrac{c}{b} \in \langle 1, \infty \rangle$

Asymptoter: $\dfrac{x - x_0}{a} = \pm \dfrac{y - y_0}{b}$

Ellipse:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Senter: $(x_0, y_0)$

Storeradius $= S = \max(a, b)$

Lilleradius $= L = \min(a, b)$

Senter-brennpunkt $c = \sqrt{S^2 - L^2}$

Eksentrisitet $\varepsilon = \dfrac{c}{S} \in [0, 1\rangle$

Fullstendig kvadrat:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

## 8.2 Parameterfremstilling

Linje: $\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$

Sirkel: $\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \end{cases} \quad (0 < t < 2\pi)$

Ellipse: $\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases} \quad (0 < t < 2\pi)$

Resiproke funksjoner:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

## 8.3 Glatte parameteriserte kurver, stigning

Horisontale tangenter: $y' = 0$

Vertikale tangenter: $x' = 0$

Tangent til parameterisert kurve:

$$\begin{cases} x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \\ y = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

Normal til parameterisert kurve:

$$\begin{cases} x = f(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \\ y = g(t_0) - f'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

## 8.4 Buelengde og arealer til parameteriserte kurver

Buelengdedifferensialen til en parameterisert kurve:

$$ds = \frac{ds}{dt}dt = \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Lengden til en glatt kurve:

$$s = \int_{t=a}^{t=b} ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Overflatearealet ved omdreining om x-aksen:

$$S = 2\pi \int_{t=a}^{t=b} |y|\, ds = 2\pi \int_a^b |g(t)| \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

Overflatearealet ved omdreining om y-aksen:

$$S = 2\pi \int_{t=a}^{t=b} |x|\, ds = 2\pi \int_a^b |f(t)| \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

Areal til en simpel, lukket kurve:

$$A = \left| \int_a^b g(t) f'(t)\, dt \right| \quad \text{hvis } g \text{ er kontinuerlig og } f \text{ er deriverbar}$$

$$A = \left| \int_a^b f(t) g'(t)\, dt \right| \quad \text{hvis } f \text{ er kontinuerlig og } g \text{ er deriverbar}$$

# T Trigonometri

Eksakte trigonometriske verdier:

| $\theta$ | grader | $\sin(\theta)$ | $\cos(\theta)$ | $\tan(\theta)$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0°$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $\pi/6$ | $30°$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| $\pi/4$ | $45°$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1$ |
| $\pi/3$ | $60°$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}$ |
| $\pi/2$ | $90°$ | $1$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $2\pi/3$ | $120°$ | $\sqrt{3}/2$ | $-1/2$ | $-\sqrt{3}$ |
| $3\pi/4$ | $135°$ | $\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-1$ |
| $5\pi/6$ | $150°$ | $1/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{3}/3$ |
| $\pi$ | $180°$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $7\pi/6$ | $210°$ | $-1/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| $5\pi/4$ | $225°$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $1$ |
| $4\pi/3$ | $240°$ | $-\sqrt{3}/2$ | $-1/2$ | $\sqrt{3}$ |
| $3\pi/2$ | $270°$ | $-1$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $5\pi/3$ | $300°$ | $-\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $-\sqrt{3}$ |
| $7\pi/4$ | $315°$ | $-\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $-1$ |
| $11\pi/6$ | $330°$ | $-1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{3}/3$ |
| $2\pi$ | $360°$ | $0$ | $1$ | $0$ |

Enhetsformelen: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Definisjon av tangens: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Radianer fra grader: $r = \frac{g°}{360°} \cdot 2\pi \approx \frac{g°}{57.296}$

Grader fra radianer: $g° = \frac{r}{2\pi} \cdot 360° \approx r \cdot 57.296$

Derivert (med radianer):

$$\sin(\theta)' = \cos(\theta)$$
$$\cos(\theta)' = -\sin(\theta)$$
$$\tan(\theta)' = \frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$$

Invers sinus:

$$\sin^{-1}(\theta) = \begin{cases} v_0 + 2k\pi \\ \pi - v_0 + 2k\pi \end{cases} \quad \text{der} \quad \begin{cases} \theta \in [-1, 1], \\ v_0 \in [-\pi/2, \pi/2], \\ \pi - v_0 \in [\pi, 3\pi/2], \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Invers cosinus:

$$\cos^{-1}(\theta) = \begin{cases} v_0 + 2k\pi \\ 2\pi - v_0 + 2k\pi \end{cases} \quad \text{der} \quad \begin{cases} \theta \in [-1, 1], \\ v_0 \in [0, \pi], \\ 2\pi - v_0 \in [\pi, 2\pi], \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Invers tangens:

$$\tan^{-1}(\theta) = v_0 + k\pi \quad \text{der} \quad \begin{cases} \theta \in \langle -\infty, \infty \rangle, \\ v_0 \in [-\pi/2, \pi/2], \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Sin, cos og tan av inverse trigonometriske funksjoner:

$$\sin(\sin^{-1} x) = x$$
$$\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$\sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$\cos(\cos^{-1} x) = x$$
$$\cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$\tan(\sin^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$\tan(\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$
$$\tan(\tan^{-1} x) = x$$

## 8.5 Polare koordinater og polare grafer

Sammenheng mellom kartesiske og polare koordinater:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

Rotasjon av polar graf:

Den polare grafen $r = f(\theta - \theta_0)$ er den polare grafen $r = f(\theta)$ rotert vinkelen $\theta_0$ om origo.

Retningen til en polar graf i origo:

Den polare grafen $r = f(\theta)$ nærmer seg origo fra retningen $\theta$ for de verdiene av $\theta$ som gjør at $f(\theta) = 0$.

Skjæringspunkt til polare grafer:

r=$f(\theta)$ og $r = g(\theta)$ har mulige skjæringspunkt i 3 tilfeller:

1. I origo hvis både $f(\theta) = 0$ og $g(\theta) = 0$ har minst en løsning hver.
2. Alle punkter $[g(\theta_i), \theta_i]$ der $\theta_i$ er løsningene til likningen $f(\theta) = g(\theta)$.
3. Alle punkter $[g(\theta_i), \theta_i]$ der $\theta_i$ er løsningene til likningen $f(\theta + (2k+1)\pi) = -g(\theta)$.

## 8.6 Areal og buelengde til polare grafer

Areal til polare grafer:

Området begrenset av grafen til $r = f(\theta)$,
og strålene $\theta = \alpha$ og $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ har arealet

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,d\theta$$

Lengden til polare grafer:

Grafen til $r = f(\theta)$ fra $\theta = \alpha$
til $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ har lengden

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}\,d\theta$$

## 10.1 Analytisk geometri i tre dimensjoner

Avstand: $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Pytagoras: $\angle BAC = 90^\circ \Leftrightarrow |AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$

Cosinussetningen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\theta)$

## 10.2 Vektorer

Basis for kartesisk rom: $\vec{\imath} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \vec{\jmath} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \vec{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

Vektor i rommet: $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$

Vektoren fra A til B:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{\imath} + (b_2 - a_2)\vec{\jmath} + (b_3 - a_3)\vec{k}$$

Tall ganger vektor: $t \cdot \vec{v} = tv_1\vec{\imath} + tv_2\vec{\jmath} + tv_3\vec{k}$

Addisjon/Subtraksjon:

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1)\vec{\imath} + (u_2 \pm v_2)\vec{\jmath} + (u_1 \pm v_1)\vec{k}$$

Vektor i andre: $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Prikkprodukt: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

Vinkel mellom u og v: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

Prikkprodukt ift vinkelrett: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Enhetsvektor: $\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$

Lengden til en vektor: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Skalarprojeksjonen av u langs v: $s = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| \cdot \cos\theta$

Vektorprojeksjonen av u langs v: $\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \hat{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$

## 10.3 Kryssprodukt

Utregning:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2 & & u_3 & & u_1 & & u_2 \\ & \times & & \times & & \times & \\ v_2 & & v_3 & & v_1 & & v_2 \end{bmatrix}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{\imath} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

Egenskaper:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$
$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\theta)$$
$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \,||\, \vec{v}$$
$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad \text{(antikommutativ)}$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \quad \text{(distributiv}$$
$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} \quad \text{over addisjon)}$$
$$(t \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (t \cdot \vec{v}) = t \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$
$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \quad \text{(ikke assosiativ)}$$

Vinkel mellom u og v: $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

Areal av trekant: $A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

Areal av parallellogram: $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Det skalare trippelproduktet: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Koplanaritet:

$\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ er koplanære $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

Volumet til et parallellepiped: $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

Volumet til et tetraeder: $V = \frac{1}{6}|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

## 10.4 Plan og linjer

Definisjoner for plan i rommet:

| | |
|---|---|
| Punkt planet går gjennom: | $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ |
| Retningsvektor til punktet: | $\vec{r}_0 = x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath} + z_0\vec{k}$ |
| Vilkårlig punkt i planet: | $P = (x, y, z)$ |
| Retningsvektor til punktet: | $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ |
| Normalvektor til planet: | $\vec{n} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}$ |

Likning for plan på vektorform: $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Likning 1 for plan på standardform:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Likning 2 for plan på standardform:

$Ax + By + Cz = D$ der $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

Skjæring med koordinataksene:

Hvis $A \neq 0$, $B \neq 0$ og $C \neq 0$ så skjærer planet i

$$\left(\frac{D}{A}, 0, 0\right),\ \left(0, \frac{D}{B}, 0\right) \text{ og } \left(0, 0, \frac{D}{C}\right)$$

Skjæring med koordinataksene II:

Et plan som går gjennom $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ og $(0, 0, c)$
kan skrives på formen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Planpensel:

$$A_1x+B_1y+C_1z-D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z-D_2)=0$$

Definisjoner for linjer i rommet:

$$\begin{aligned} \text{Punkt linja går gjennom:}\quad & P_0=(x_0,y_0,z_0)\\ \text{Retningsvektor til punktet:}\quad & \vec{r}_0=x_0\vec{\imath}+y_0\vec{\jmath}+z_0\vec{k}\\ \text{Vilkårlig punkt på linja:}\quad & P=(x,y,z)\\ \text{Retningsvektor til punktet:}\quad & \vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\\ \text{Retningsvektor til linja:}\quad & \vec{v}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k} \end{aligned}$$

Linje på vektor-parameterform: $\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{v}$

Linje på skalar-parameterform: $\begin{cases} x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct \end{cases}$

Linje på standardform*: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$

*Men: Hvis f.eks. $c=0$; $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}, z=z_0$

Avstand mellom punkt og plan:

$$s=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Avstand mellom punkt og linje:

$$s=\frac{|(\vec{r}_0-\vec{r}_1)\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Avstand mellom to linjer:

$$s=\frac{|(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}$$

## 10.6 Sylindriske og sfæriske koordinater

atan2 gir vinkelen til et punkt i xy-planet:

$$\text{atan2}(y,x)=\begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{når } x>0\\ \tan^{-1}(y/x)+\pi & \text{når } x<0, y\geq 0\\ \tan^{-1}(y/x)-\pi & \text{når } x<0, y<0\\ \pi/2 & \text{når } x=0, y>0\\ -\pi/2 & \text{når } x=0, y<0\\ \text{udefinert} & \text{når } x=0, y=0 \end{cases}$$

Kartesisk punkt i rommet: $(x,y,z)$

Sylindrisk punkt i rommet: $[r,\theta,z]$

Sfærisk punkt i rommet: $[R,\phi,\theta]$

Skrivemåten for sfæriske punkter er dessverre ikke standardisert. I denne formelsamlingen så betyr $\theta$ den vanlige polare vinkelen i $xy$-planet, og $\phi$ betyr vinkelen som ligger mellom positiv $z$-akse og strålen som går fra origo og ut til punktet.

Kartesisk til sylindrisk: $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\text{atan2}(y,x)\\ z=z \end{cases}$

Sylindrisk til kartesisk: $\begin{cases} x=r\cos(\theta)\\ y=r\sin(\theta)\\ z=z \end{cases}$

Kartesisk til sfærisk: $\begin{cases} R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \phi=\cos^{-1}(z/R)\\ \theta=\text{atan2}(y,x) \end{cases}$

Sfærisk til kartesisk: $\begin{cases} x=R\sin(\phi)\cos(\theta)\\ y=R\sin(\phi)\sin(\theta)\\ z=R\cos(\phi) \end{cases}$

Sylindrisk til sfærisk: $\begin{cases} R=\sqrt{r^2+z^2}\\ \phi=\cos^{-1}(z/R)\\ \theta=\theta \end{cases}$

Sfærisk til sylindrisk: $\begin{cases} r=R\sin(\phi)\\ \theta=\theta\\ z=R\cos(\phi) \end{cases}$

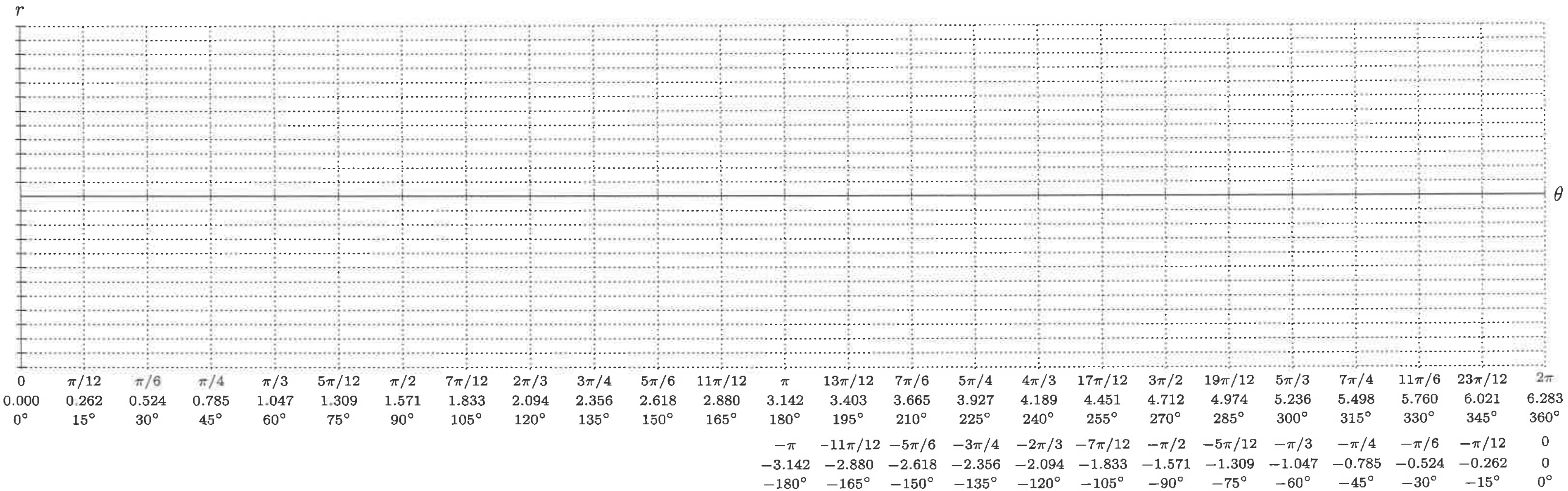
## 11.1 Vektorfunksjoner

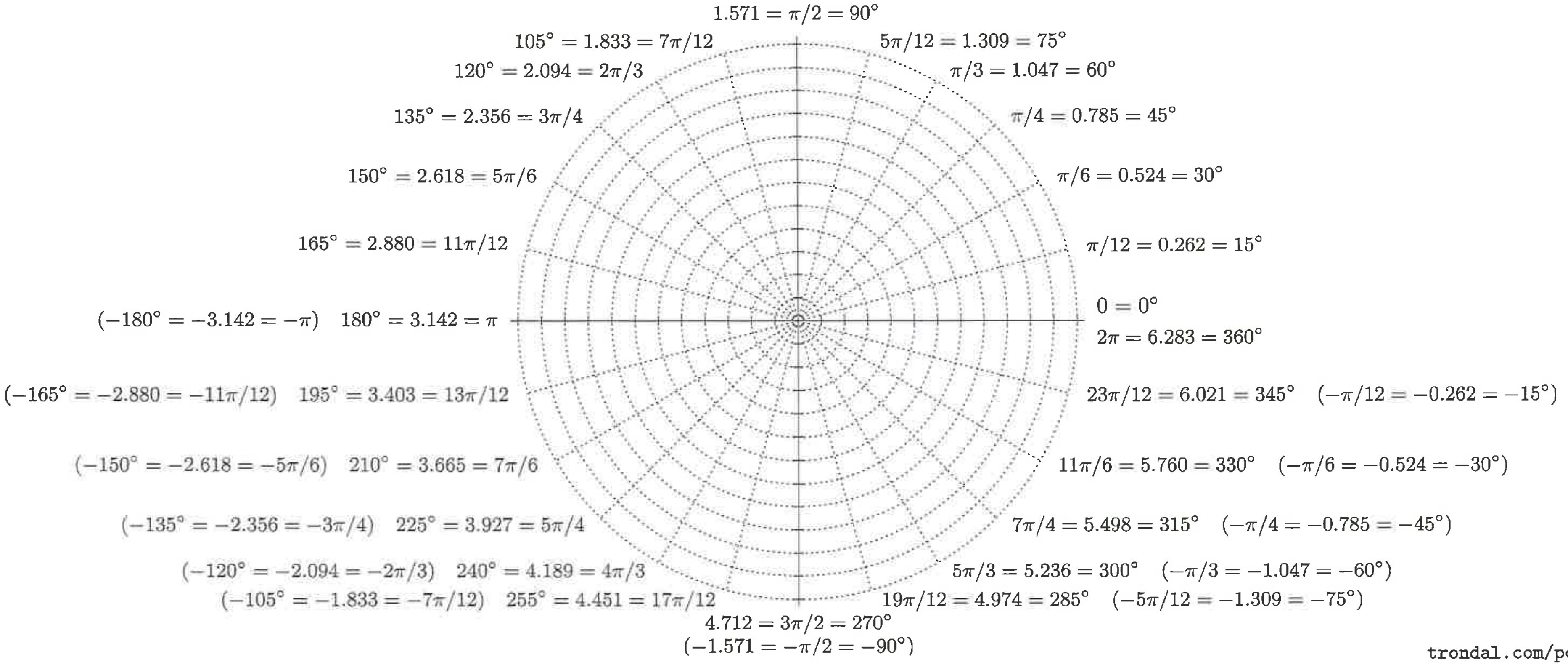
Posisjon: $\vec{r}(t)=x(t)\vec{\imath}+y(t)\vec{\jmath}+z(t)\vec{k}$

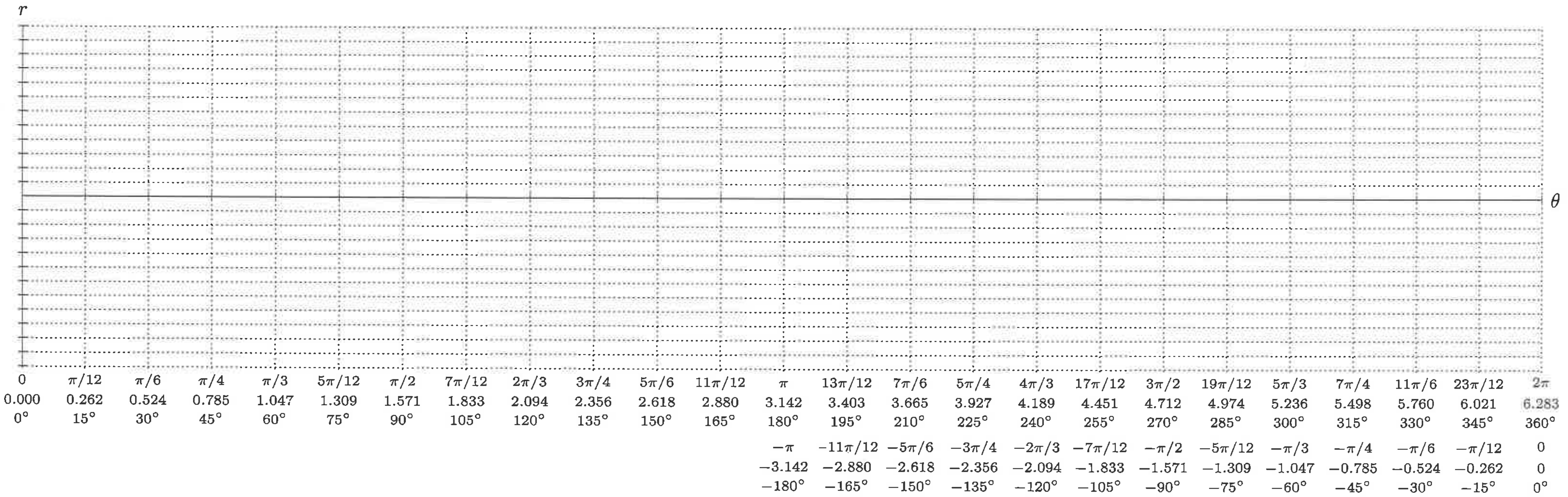
Hastighet: $\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)=x'(t)\vec{\imath}+y'(t)\vec{\jmath}+z'(t)\vec{k}$

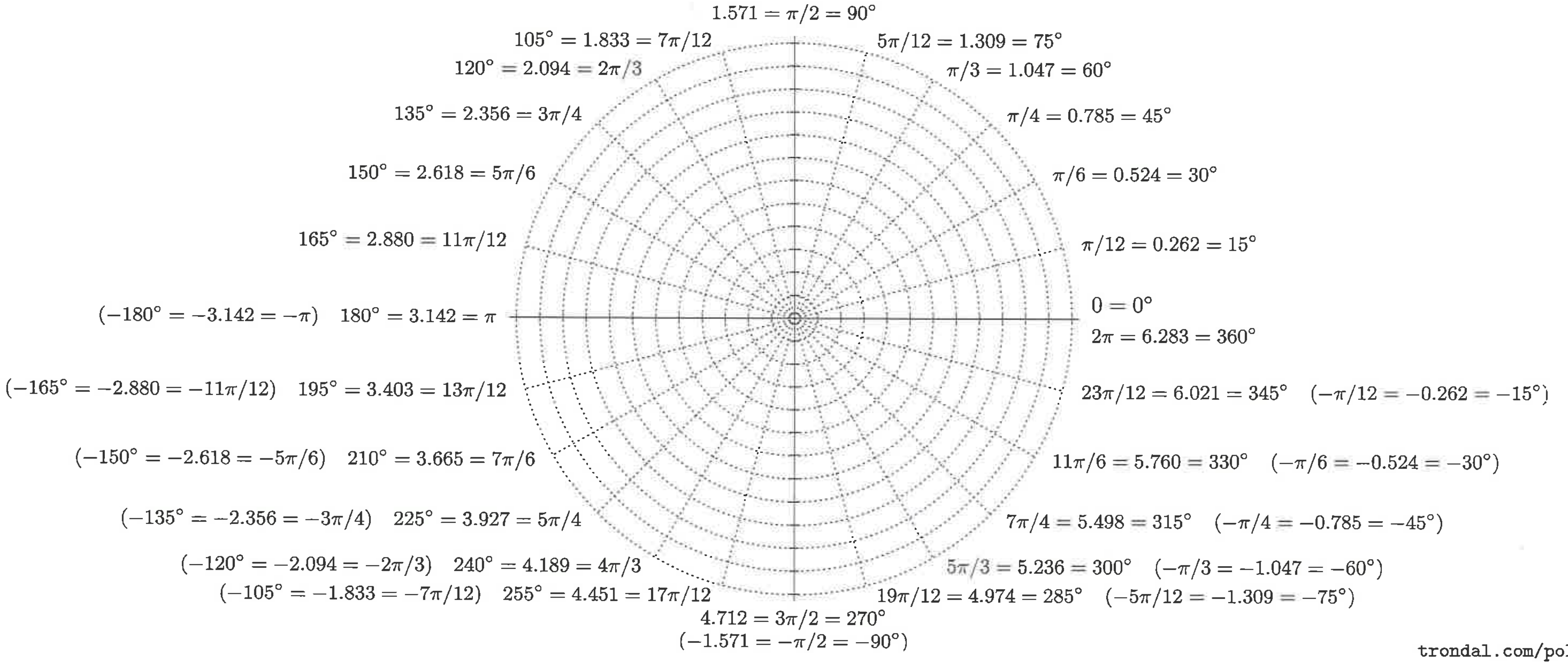
Fart: $v(t)=|\vec{v}(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$

Akselerasjon: $\vec{a}(t)=\vec{v}\,'(t)=x''(t)\vec{\imath}+y''(t)\vec{\jmath}+z''(t)\vec{k}$

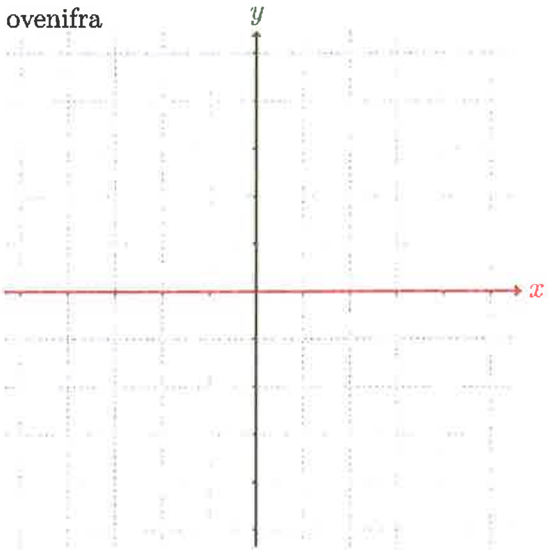

r
θ
0 π/12 π/6 π/4 π/3 5π/12 π/2 7π/12 2π/3 3π/4 5π/6 11π/12 π 13π/12 7π/6 5π/4 4π/3 17π/12 3π/2 19π/12 5π/3 7π/4 11π/6 23π/12 2π
0.000 0.262 0.524 0.785 1.047 1.309 1.571 1.833 2.094 2.356 2.618 2.880 3.142 3.403 3.665 3.927 4.189 4.451 4.712 4.974 5.236 5.498 5.760 6.021 6.283
0° 15° 30° 45° 60° 75° 90° 105° 120° 135° 150° 165° 180° 195° 210° 225° 240° 255° 270° 285° 300° 315° 330° 345° 360°
−π −11π/12 −5π/6 −3π/4 −2π/3 −7π/12 −π/2 −5π/12 −π/3 −π/4 −π/6 −π/12 0
−3.142 −2.880 −2.618 −2.356 −2.094 −1.833 −1.571 −1.309 −1.047 −0.785 −0.524 −0.262 0
−180° −165° −150° −135° −120° −105° −90° −75° −60° −45° −30° −15° 0°

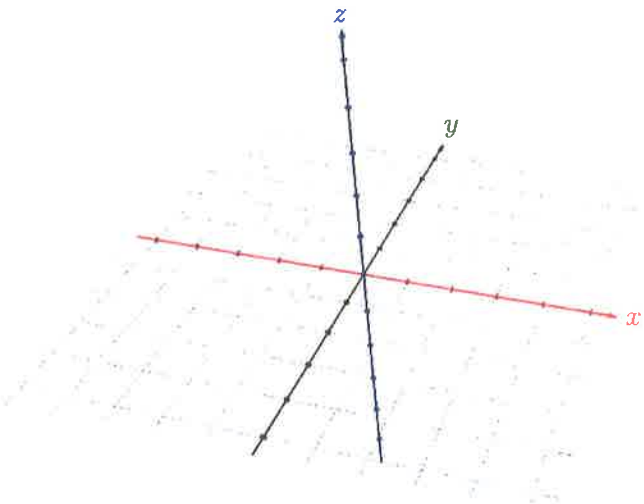

1.571 = π/2 = 90°
105° = 1.833 = 7π/12
5π/12 = 1.309 = 75°
120° = 2.094 = 2π/3
π/3 = 1.047 = 60°
135° = 2.356 = 3π/4
π/4 = 0.785 = 45°
150° = 2.618 = 5π/6
π/6 = 0.524 = 30°
165° = 2.880 = 11π/12
π/12 = 0.262 = 15°
0 = 0°
(−180° = −3.142 = −π) 180° = 3.142 = π
2π = 6.283 = 360°
(−165° = −2.880 = −11π/12) 195° = 3.403 = 13π/12
23π/12 = 6.021 = 345° (−π/12 = −0.262 = −15°)
(−150° = −2.618 = −5π/6) 210° = 3.665 = 7π/6
11π/6 = 5.760 = 330° (−π/6 = −0.524 = −30°)
(−135° = −2.356 = −3π/4) 225° = 3.927 = 5π/4
7π/4 = 5.498 = 315° (−π/4 = −0.785 = −45°)
(−120° = −2.094 = −2π/3) 240° = 4.189 = 4π/3
5π/3 = 5.236 = 300° (−π/3 = −1.047 = −60°)
(−105° = −1.833 = −7π/12) 255° = 4.451 = 17π/12
19π/12 = 4.974 = 285° (−5π/12 = −1.309 = −75°)
4.712 = 3π/2 = 270°
(−1.571 = −π/2 = −90°)


r
θ
0 0.000 0°
π/12 0.262 15°
π/6 0.524 30°
π/4 0.785 45°
π/3 1.047 60°
5π/12 1.309 75°
π/2 1.571 90°
7π/12 1.833 105°
2π/3 2.094 120°
3π/4 2.356 135°
5π/6 2.618 150°
11π/12 2.880 165°
π 3.142 180° −π −3.142 −180°
13π/12 3.403 195° −11π/12 −2.880 −165°
7π/6 3.665 210° −5π/6 −2.618 −150°
5π/4 3.927 225° −3π/4 −2.356 −135°
4π/3 4.189 240° −2π/3 −2.094 −120°
17π/12 4.451 255° −7π/12 −1.833 −105°
3π/2 4.712 270° −π/2 −1.571 −90°
19π/12 4.974 285° −5π/12 −1.309 −75°
5π/3 5.236 300° −π/3 −1.047 −60°
7π/4 5.498 315° −π/4 −0.785 −45°
11π/6 5.760 330° −π/6 −0.524 −30°
23π/12 6.021 345° −π/12 −0.262 −15°
2π 6.283 360° 0 0 0°

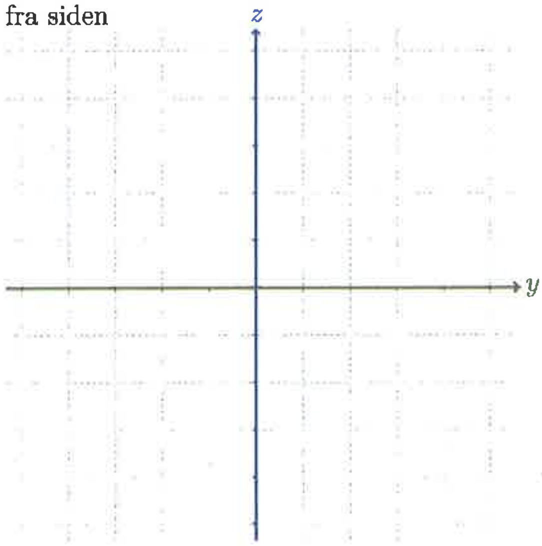

1.571 = π/2 = 90°
105° = 1.833 = 7π/12
5π/12 = 1.309 = 75°
120° = 2.094 = 2π/3
π/3 = 1.047 = 60°
135° = 2.356 = 3π/4
π/4 = 0.785 = 45°
150° = 2.618 = 5π/6
π/6 = 0.524 = 30°
165° = 2.880 = 11π/12
π/12 = 0.262 = 15°
(−180° = −3.142 = −π) 180° = 3.142 = π
0 = 0°
2π = 6.283 = 360°
(−165° = −2.880 = −11π/12) 195° = 3.403 = 13π/12
23π/12 = 6.021 = 345° (−π/12 = −0.262 = −15°)
(−150° = −2.618 = −5π/6) 210° = 3.665 = 7π/6
11π/6 = 5.760 = 330° (−π/6 = −0.524 = −30°)
(−135° = −2.356 = −3π/4) 225° = 3.927 = 5π/4
7π/4 = 5.498 = 315° (−π/4 = −0.785 = −45°)
(−120° = −2.094 = −2π/3) 240° = 4.189 = 4π/3
5π/3 = 5.236 = 300° (−π/3 = −1.047 = −60°)
(−105° = −1.833 = −7π/12) 255° = 4.451 = 17π/12
19π/12 = 4.974 = 285° (−5π/12 = −1.309 = −75°)
4.712 = 3π/2 = 270°
(−1.571 = −π/2 = −90°)

ovenifra

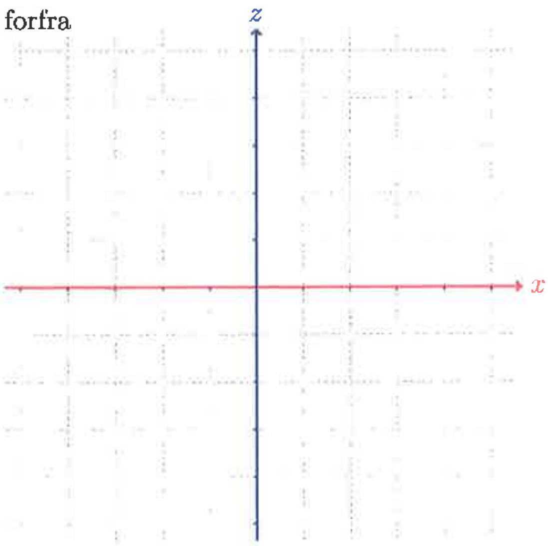


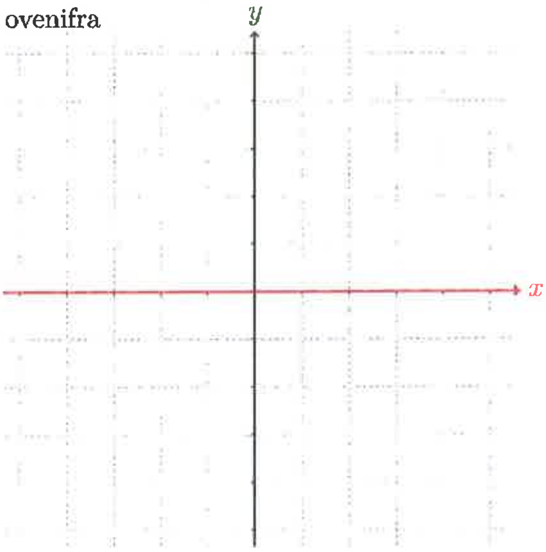

fra siden

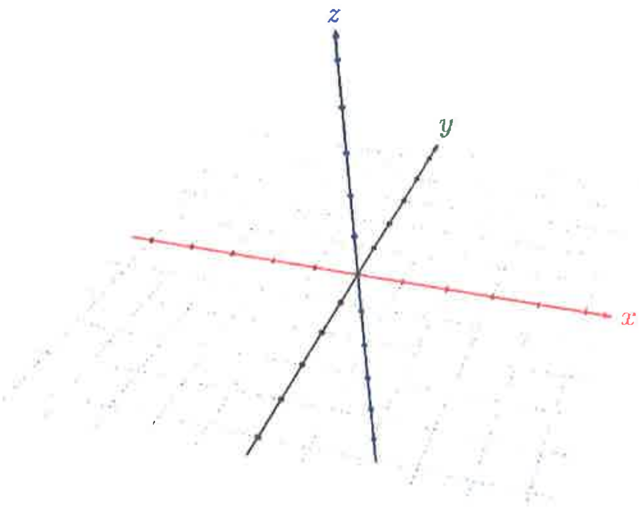



forfra

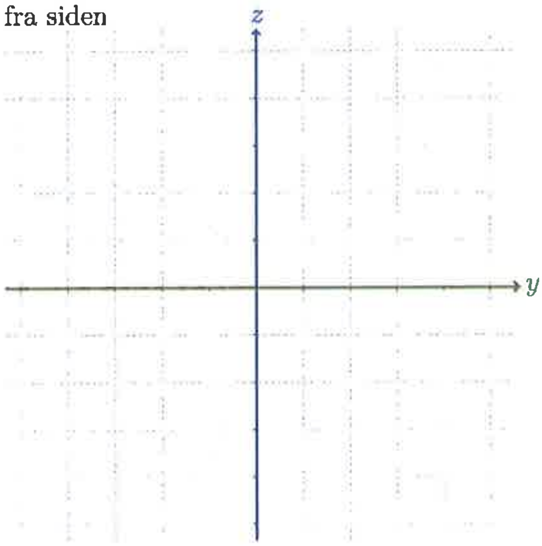


ovenifra




fra siden




forfra