10.4.15

$P_0 = (1,2,3)$

$\vec{r}_0 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$

$$\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + t\cdot(2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k})$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-4}$$

10.4.16

$P_0 = (-1,0,1)$

$\vec{r}_0 = -\vec{i} + \vec{k}$

$\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$

$$\vec{r} = -\vec{i} + \vec{k} + t\cdot(2\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k})$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + 7t \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{7}$$

10.4.17

$P_0 = (0,0,0)$

Normalene til planene:

$\vec{n}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{n}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 2 & & -1 & & 1 & & 2 \\ & \times & & \times & & \times & \\ -1 & & 4 & & 2 & & -1 \end{bmatrix}$$

$\vec{v} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{k}$

$$\vec{r} = t \cdot (7\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{k})$$

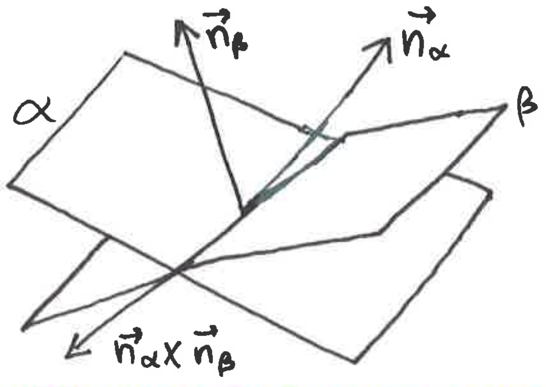
$$\begin{cases} x = 7t \\ y = -6t \\ z = -5t \end{cases}$$

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{-5}$$

10.4.18

$P_0 = (2,-1,-1)$

En linje som er parallell til planene $x+y=0$ og $x-y+2z=0$ må stå vinkelrett på begge normalene til disse planene, og er da parallell med kryssproduktet til dem.



$\vec{v} = (\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 1 & & 1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ -1 & & 2 & & 1 & & -1 \end{bmatrix}$$

$\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

$$\vec{r} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} + t \cdot (2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k})$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-2}$$

10.4.20

$$\vec{r} = \underset{x_0=1}{\vec{i}} + \underset{y_0=4}{4\vec{j}} + \underset{z_0=9}{9\vec{k}} + t \cdot (\underset{a=-2}{-2\vec{i}} + \underset{b=3}{3\vec{j}} \underset{c=-4}{-4\vec{k}})$$

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-9}{-4}$$

10.4.21

$$\begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = 3t \\ z = 7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_0 = 4 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a = -5 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{matrix}$$

$$\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{3}, \quad z = 7$$

10.4.22

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+3y-4z=4 \end{cases}$$

Denne linja er parallell med kryssproduktet av normalene til planene som definerer linja:

$$\vec{v} = (\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}) \times (2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 & & 3 & & 1 & & -2 \\ 3 & \times & -4 & \times & 2 & \times & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = -\vec{i} + 10\vec{j} + 7\vec{k}$$

Et punkt på linja får vi ved å sette f.eks. $x=0$:

$$\begin{cases} -2y+3z=0 \\ 3y-4z=4 \end{cases}$$

$$y = \frac{3}{2}z,$$

$$3y-4z = 3\cdot\left(\frac{3}{2}z\right) - 4z = 4$$

$$\frac{9}{2}z - \frac{8}{2}z = 4$$

$$\frac{1}{2}z = 4$$

$$z = 8$$

$$y = \frac{3}{2}\cdot 8 = 12,$$

så $P_0 = (0,12,8)$ og

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-12}{10} = \frac{z-8}{7}$$

10.4.26

Avstanden mellom $P_0 = (0,0,0)$ og planet $x+2y+3z=4$ er

$$s = \frac{|1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

10.4.27

$$s = \frac{|3\cdot 1 - 4\cdot 2 - 5\cdot 0 - 2|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

10.4.28

$$\vec{r}_0 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) \times (2\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k})$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ -1 & \times & -5 & \times & 2 & \times & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = -4\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$$

Et punkt på linja: Setter $z=0$, får da $x = \frac{1}{3}$ og $y = -\frac{1}{3}$, så

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}, \quad \text{og}$$

$$s = \frac{|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|(-\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}) \times (-4\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k})|}{\sqrt{4^2+7^2+3^2}}$$

$$s = \frac{\left|\begin{bmatrix} 1/3 & & 0 & & -1/3 & & 1/3 \\ 7 & \times & -3 & \times & -4 & \times & 7 \end{bmatrix}\right|}{\sqrt{74}}$$

$$s = \frac{|-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}|}{\sqrt{74}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{74}} = \sqrt{\frac{3}{74}}$$

10.4.29

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2z=-5 \end{cases}$$

L_1 $\qquad\qquad$ L_2

L_1: Når $y=0$, er $x=3$ og $z=0$,

så $\vec{r}_1 = 3\vec{i}$.

$$\vec{v}_1 = (\vec{i}+2\vec{j}) \times (\vec{i}+2\vec{k})$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & \times & 0 & \times & 1 & \times & 2 \\ 0 & & 2 & & 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

L_2: Når $z=0$, er $x=-5$ og $y=11$,

så $\vec{r}_2 = -5\vec{i} + 11\vec{j}$.

$$\vec{v}_2 = (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) \times (\vec{i}-2\vec{k})$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \times & 1 & \times & 1 & \times & 1 \\ 0 & & -2 & & 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$s = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -5\vec{i} + 11\vec{j} - 3\vec{i} = -8\vec{i} + 11\vec{j}$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{j}) \times (-2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & \times & -2 & \times & 4 & \times & -2 \\ 3 & & -1 & & -2 & & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 8\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$s = \frac{|(-8\vec{i}+11\vec{j}) \cdot (8\vec{i}+8\vec{j}+8\vec{k})|}{\sqrt{8^2+8^2+8^2}}$$

$$s = \frac{|-64+88|}{\sqrt{3 \cdot 8^2}} = \frac{24}{8\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

Fasiten i boka sier $\frac{18}{\sqrt{69}}$

men det er feil.

10.4.30

Linje: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$

Er parallell med vektoren $\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

planet: $2y - z = 1$

Har normalvektor $2\vec{j} - \vec{k}$

$$(\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}) \cdot (2\vec{j}-\vec{k}) = 4-4 = 0$$

Dvs, linja står vinkelrett på normalen til planet, og da må linja være parallell med planet.

Avstanden mellom linja og planet er da lik avstanden mellom ethvert punkt på linja og planet. Et punkt er $x_0 = 2$, $y_0 = -3$, $z_0 = 1$, og

$$s = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$s = \frac{|0 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

10.6.1

$(x,y,z) = (2,-2,1)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}(-2/2) = -\frac{\pi}{4}$

$z = 1$

$[r,\theta,z] = [2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}, 1]$

$R = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$

$\phi = \cos^{-1}(1/3) = 1.231$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$

$[R,\phi,\theta] = [3, 1.231, -\pi/4]$

10.6.2

$[r,\theta,z] = [2, \pi/6, -2]$

$x = 2\cdot\cos(\pi/6) = \sqrt{3}$

$y = 2\cdot\sin(\pi/6) = 1$

$z = -2$

$(x,y,z) = (\sqrt{3}, 1, -2)$

$R = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$\phi = \cos^{-1}(-2/(2\sqrt{2})) = \frac{3\pi}{4}$

$\theta = \pi/6$

$[R,\phi,\theta] = [2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi/6]$

10.6.3

$[R,\phi,\theta] = [4, \pi/3, 2\pi/3]$

$x = 4\cdot\sin(\pi/3)\cdot\cos(2\pi/3) = -\sqrt{3}$

$y = 4\cdot\sin(\pi/3)\cdot\sin(2\pi/3) = 3$

$z = 4\cdot\cos(\pi/3) = 2$

$(x,y,z) = (-\sqrt{3}, 3, 2)$

$r = 4\cdot\sin(\pi/3) = 2\sqrt{3}$

$\theta = 2\pi/3$

$z = 2$

$[r,\theta,z] = [2\sqrt{3}, 2\pi/3, 2]$