

10.3.1

$$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (-2) \cdot (-4) - 3 \cdot 1 \vec{i} + (3 \cdot 3 - 1 \cdot (-4)) \vec{j} + (1 \cdot 1 - (-2) \cdot 3) \vec{k} \\ &= (8 - 3) \vec{i} + (9 + 4) \vec{j} + (1 + 6) \vec{k} \\ &= \boxed{5\vec{i} + 13\vec{j} + 7\vec{k}}\end{aligned}$$

10.3.2

$$\vec{u} = \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = (1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) \vec{i} + (2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) \vec{j} + (0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) \vec{k} \\ &= (1 + 2) \vec{i} + (-2 - 0) \vec{j} + (0 + 1) \vec{k} \\ &= \boxed{3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}\end{aligned}$$

10.3.3

$$A = (1, 2, 0), \quad B = (1, 0, 2), \quad C = (0, 3, 1)$$

$$\vec{AB} = (1-1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = -2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{AC} = (0-1)\vec{i} + (3-2)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\begin{aligned}\text{Areal} &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| (-2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) \vec{i} + (2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) \vec{j} + (0 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1)) \vec{k} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| -4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{24} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = \boxed{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

10.3.4

$$A = (a, 0, 0), B = (0, b, 0), C = (0, 0, c)$$

$$\vec{AB} = -a\vec{i} + b\vec{j}, \quad \vec{AC} = -a\vec{i} + c\vec{k}$$

$$\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} b & 0 & -a & b \\ 0 & c & -a & 0 \end{bmatrix} = bc\vec{i} + ac\vec{j} + ab\vec{k}$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{bc\vec{i} + ac\vec{j} + ab\vec{k}}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$$

Areal av trekant ABC:

$$\frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$$

10.3.5

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\hat{w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

10.3.6

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = -7\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{w} = -(\vec{u} \times \vec{v}) = 7\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\hat{w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{7\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{7^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{101}}\vec{i} + \frac{6}{\sqrt{101}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{101}}\vec{k}$$

10.3.15

$$A = (1, 0, 0), B = (1, 2, 0), C = (2, 2, 2), D = (0, 3, 2)$$

$$\vec{u} = \vec{AB} = 2\vec{j}, \vec{v} = \vec{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{w} = \vec{AD} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| (2\vec{j}) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| (2\vec{j}) \cdot (-2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}) \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| -8 \right| = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

10.3.17

$$A = (1, 1, -1), B = (0, 3, -2), C = (-2, 1, 0), D = (k, 0, 2)$$

$$\vec{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{AC} = -3\vec{i} + \vec{k}, \vec{AD} = (k-1)\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = 0$$

$$(-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & k-1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (\vec{i} + (k+8)\vec{j} + 3\vec{k}) = 0$$

$$-1 + 2 \cdot (k+8) - 3 = 0$$

$$2 \cdot (k+8) = 4$$

$$k+8 = 2$$

$$k = -6$$