Del 1-Eks08-1-g:

Gitt punktene $A(1,1,1)$, $B(3,3,2)$ og $C(2,1,2)$. Finn $\angle BAC$.

I Del 1 av eksamen kan du få bruk for eksaktverdier til noen vinkler:

| $v$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin v$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1$ |
| $\cos v$ | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan v$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | - |

Del 1-V09-1-d:

Gitt punktene $A(2,3,7)$, $B(3,5,2)$, $C(1,1,5)$ og $D(3,5,t)$.

1) Bestem en verdi for $t$ slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

2) Undersøk om det finnes en verdi for $t$ slik at $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

Del 1-V09-2:

Vi har gitt punktene $A(1,0,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,1,2)$ og $D(4,1,-3)$.

a) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Vis at arealet av trekanten $ABC$ er lik $\frac{3}{2}$.

b) Bestem volumet av pyramiden $ABCD$.

c) Finn likningen for planet $\alpha$ som går gjennom punktene $A$, $B$ og $C$.

Del 1-H10-2:

Gitt punktene $A(1,1,1)$, $B(3,2,3)$ og $C(2,7,5)$.

a) Finn $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Punktene $A$, $B$ og $C$ ligger i planet $\alpha$.

c) Finn likningen til planet $\alpha$. Undersøk om punktet $D(2,2,3)$ ligger i planet $\alpha$.

d) Bestem en parameterframstilling for en linje $l$ som går gjennom punktet $D$, og som står vinkelrett på planet $\alpha$. Finn skjæringspunktet $S$ mellom $l$ og $\alpha$.

Del 1-V10-2:

Vi har gitt punktene $A(3, 0, -2)$, $B(0, 2, 0)$ og $C(1, -1, 4)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b) Finn en likning for planet $\alpha$ som går gjennom punktene $A$, $B$ og $C$.

En rett linje $l$ går gjennom punktet $P(5, 4, 4)$ og står vinkelrett på planet $\alpha$.

c) Vis at en parameterframstilling for $l$ er $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$

Finn skjæringspunktet mellom $l$ og $xz$ – planet.

Vi lar $Q$ være et vilkårlig punkt på linjen $l$.

d) Bestem volumet av pyramiden $ABCQ$ uttrykt ved $t$.

e) Bestem koordinatene til $Q$ slik at volumet av pyramiden $ABCQ$ blir 42.

Del 1-H10-1-d:

Gitt punktene $A(1, 0, 3)$, $B(3, 2, 4)$ og $C(5, 3, 0)$

1) Bestem $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ og $\left|\overrightarrow{AC}\right|$

2) Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

3) Vis at $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|^2 + \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

Del 1-V11-1-d:

Vi har gitt to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Forklar og tegn figurer som viser hvordan vektorene kan ligge i forhold til hverandre når

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Del 1-V11-1-e:

Vi har gitt punktene $A(1, 1, -1)$, $B(2, -1, 3)$ og $C(3, 2, 2)$

Vis ved regning at $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ står vinkelrett på både $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$

I et koordinatsystem har vi punktene $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ og $C(0, 0, 5)$.

a) Tegn punktene i et koordinatsystem. Finn avstanden fra *A* til *B*.

b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, og bruk svaret til å finne volumet av tetraederet *OABC*.

En arealsetning oppkalt etter Pytagoras sier at:

$$F^2_{\Delta ABC} = F^2_{\Delta AOC} + F^2_{\Delta BOC} + F^2_{\Delta OAB}$$

Her betyr $F_{\Delta ABC}$ arealet av trekanten *ABC*. Tilsvarende gjelder for leddene på høyre side.

c) Regn ut de fire arealene, og kontroller at arealsetningen stemmer i dette tilfellet.

Planet $\alpha$ går gjennom punktene *A*, *B* og *C*.

d) Bestem likningen til planet $\alpha$.

Et annet plan $\beta$ er gitt ved

$$\beta: \quad x + y - z = 5$$

e) Finn vinkelen mellom planene $\alpha$ og $\beta$.

Vi lar nå punktet *C* få koordinatene $(0, 0, t)$. Vi antar at $t \neq 0$.

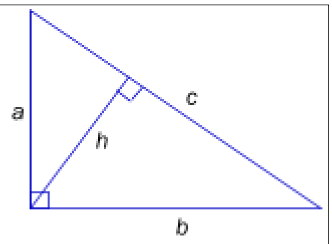
f) Forklar at likningen til planet $\alpha$ da kan skrives på formen

$$\alpha: \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{t} = 1$$

g) Finn likningen for det planet som $\alpha$ nærmer seg til når $t \to \infty$. Hva kan du si om dette planet?

Del 2-H09-3:

Vi har en rettvinklet trekant med kateter $a$ og $b$ og hypotenus $c$. Høyden ned på hypotenusen kalles $h$. Se figuren til høyre.

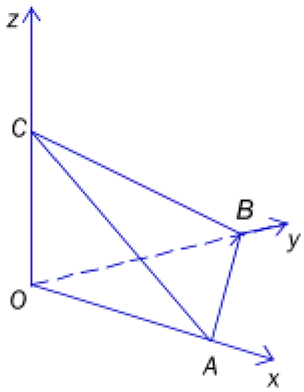



a) Forklar at $a \cdot b = c \cdot h$

Bruk Pytagoras' setning og vis at

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

Vi vil nå studere tetraederet *OABC*. Hjørnet $O$ er plassert i origo, $A(a, 0, 0)$ på *x*-aksen, $B(0, b, 0)$ på *y*-aksen og $C(0, 0, c)$ på *z*-aksen. Se figuren nedenfor.




b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ uttrykt ved $a$, $b$ og $c$. Finn arealet av trekanten *ABC*.

En arealsetning som er oppkalt etter Pytagoras, sier at

$$F^2_{\triangle ABC} = F^2_{\triangle OAC} + F^2_{\triangle OBC} + F^2_{\triangle OAB}$$

Her betyr $F_{\triangle ABC}$ arealet av trekanten *ABC*. Tilsvarende gjelder for leddene på høyre side.

c) Kontroller at arealsetningen er riktig.

d) Avstanden fra $O$ til $\triangle ABC$ kalles $h$. Forklar at vi kan skrive

$$F_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2h}$$

e) Bruk c) og d) til å vise at

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

Del 2-V11-5:

En rett linje $l$ er gitt ved parameterframstillingen

$$l: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

a) Linjen $l$ skjærer $xy$-planet i punktet $A$ og $xz$-planet i $B$.

Regn ut avstanden mellom $A$ og $B$.

En annen rett linje $m$ er gitt ved parameterframstillingen

$$m: \begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 1 + s \end{cases}$$

b) Vis at linjene $l$ og $m$ ikke er parallelle.

To linjer i rommet som verken er parallelle eller skjærer hverandre, er *vindskeive*. For vindskeive linjer gjelder denne setningen:

*Når to linjer $l$ og $m$ er vindskeive, fins det et punkt $P$ på $l$ og et punkt $Q$ på $m$ slik at $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både $l$ og $m$. Avstanden mellom $l$ og $m$ er definert som $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$.*

c) Vi lar $P$ være et tilfeldig valgt punkt på $l$ og $Q$ et tilfeldig valgt punkt på $m$.

Vis at vi kan skrive $\overrightarrow{PQ} = [s + 2t - 5, -s - t - 2, s - 2t - 3]$

d) Finn koordinatene til $P$ og $Q$ når $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både $l$ og $m$.

e) Finn avstanden mellom linjene $l$ og $m$.