Formelsamling til MA-111 Lineær algebra for multimedia (versjon 5)

Todimensjonale vektorer

En todimensjonal vektor består av to tall og kan f.eks. representere en posisjon eller en forflytning i et todimensjonalt koordinatsystem. Som navn på vektorer brukes som regel små bokstaver. To vanlige skrivemåter er

1) Navn med fet skrift, $\boldsymbol{a}$, er vanlig i trykt tekst.

2) Pil over navn, $\vec{a}$, er vanlig i håndskrevet tekst.

Skrivemåte: $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x\text{-komponent} \\ \leftarrow y\text{-komponent} \end{matrix}$

Nullvektor: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Multiplikasjon av vektor med tall: $k\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix}$

Divisjon av vektor med tall: $\boldsymbol{a}/k = \begin{bmatrix} a_1/k \\ a_2/k \end{bmatrix}$

Addisjon av to vektorer: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$

Differanse av to vektorer: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{bmatrix}$

Lengden av en vektor: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Skalarprodukt (prikkprodukt): $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Dette betyr at $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$.

Hvis $\boldsymbol{a}$ står vinkelrett på $\boldsymbol{b}$ skrives det slik: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$

Det viser seg at $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$

En enhetsvektor er en vektor med lengde 1. For å regne ut en enhetsvektor $\boldsymbol{n}$ som peker samme retning som en vektor $\boldsymbol{v}$ brukes formelen

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$$

Kryssprodukt/vektorprodukt er en regneoperasjon definert for tredimensjonale vektorer:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{v}$ vil nå stå vinkelrett både på $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$. Det er også slik at

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

En teknikk for å regne ut kryssproduktet mellom to vektorer:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & 5 \\ & \times & \\ 3 & & 6 \\ & \times & \\ 1 & & 4 \\ & \times & \\ 2 & & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 6 - 5\cdot 3 \\ 3\cdot 4 - 6\cdot 1 \\ 1\cdot 5 - 4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 15 \\ 12 - 6 \\ 5 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Matriser

En matrise er en samling med tall som er arrangert i rader og kolonner. Som navn på matriser brukes som regel store bokstaver. I trykt tekst er det vanlig å bruke fet skrift på navnet, mens i håndskreven tekst er det vanlig å bare skrive en stor bokstav. En **$m \times n$-matrise** ("m ganger n matrise") er en matrise med m rader og n kolonner. m og n trenger ikke å være forskjellige tall.

En 2×3-matrise kan skrives slik:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Et tall i en matrise kalles et element. Navn på elementer i matriser følger dette systemet med to indekser:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Dvs: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{23} = 1$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = -2$.

Multiplikasjon av 2×2-matrise med 2D-vektor:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 \end{bmatrix}$$

Hvis antallet kolonner i en matrise likt antallet rader i en annen matrise, så kan de ganges sammen som i eksempelet her:

$$\begin{array}{c|c} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \end{array} = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 17 & 3 & 4 \\ 15 & 7 & -8 & 4 \\ -3 & 27 & 11 & -4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 13 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 68 & -9 & -51 & 28 \\ 174 & 280 & -27 & 24 \\ 37 & 163 & 26 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

F.eks. så har -27 her kommet frem ved å plusse sammen produktet av tall fra 2. rad i $\boldsymbol{A}$ og 3. kolonne i $\boldsymbol{B}$ slik:

$$0 \cdot 3 + 13 \cdot (-8) + 7 \cdot 11 = -27$$

Merk at $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ som regel <u>ikke</u> er lik $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$!

Rotasjonsmatrise i 2D

Rotasjon som dreier en vektor mot klokken en vinkel θ:

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotasjon av en graf $y = f(x)$

Grafen til en likning med y og x roteres med en vinkel θ ved å bytte ut x og y i likningen med hhv. x- og y-komponenten til

$$\boldsymbol{R}(-\theta) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta \\ -x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{bmatrix}$$

Skalering med diagonalmatriser

En kvadratisk matrise har like mange rader og kolonner. Diagonalen i en kvadratisk matrise betyr elementene fra øverste venstre hjørne til nederste høyre hjørne. Kvadratiske matriser kan være symmetriske. Da er verdien på elementene speilet om diagonalen like. En symmetrisk 2×2-matrise kan skrives slik:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & b \\ b & a_{22} \end{bmatrix}$$

En diagonalmatrise er en symmetrisk matrise der alle de symmetriske verdiene er lik 0. En 2×2-diagonalmatrise kan skrives:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

En diagonalmatrise skalerer vektorer langs x- og y-aksene:

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_1 \\ a_{22}p_2 \end{bmatrix}$$

Skalering med symmetriske matriser

Sporet (trasen) til en matrise: $\operatorname{tr}\boldsymbol{M} = a_{11} + a_{22}$. Determinanten til en matrise: $\det\boldsymbol{M} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. En matrise $\boldsymbol{M}$ er positiv hvis $\operatorname{tr}\boldsymbol{M} \geq 0$ og $\det\boldsymbol{M} \geq 0$.

Egenverdier

En symmetrisk matrise skalerer vektorer med faktorer som kalles matrisens egenverdier. Egenverdiene til matrisen $\boldsymbol{M}$ regnes ut med formelen

$$g = \frac{1}{2}\left(m_{11} + m_{22} \pm \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}\right)$$
$$\boldsymbol{M} \text{ er positiv} \quad \Leftrightarrow \quad g_1 \geq 0 \quad \text{og} \quad g_2 \geq 0$$

Egenverdiene g_1 og g_2 utgjør spekteret til $\boldsymbol{M}$. Det å finne dem kalles spektralanalyse. Hvis $\boldsymbol{M}$ er en diagonalmatrise så er egenverdiene lik elementene på diagonalen til $\boldsymbol{M}$. Skalering skjer langs matrisens egenakser som går langs matrisens egenvektorer. Egenvektorene $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ regnes ut med formlene

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g_1 - m_{11} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g_2 - m_{11} \end{bmatrix}$$

Egenakser står alltid vinkelrett på hverandre.

For en symmetrisk matrise $\boldsymbol{M}$ med egenverdier g_1 og g_2 og tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ så er de følgende såkalte egenverdilikningene oppfylt:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{u} = g_1\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{M}\boldsymbol{v} = g_2\boldsymbol{v}$$

Matriserotasjon

Egenaksene til en symmetrisk matrise $\boldsymbol{M}$ kan roteres med en vinkel θ med formelen

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}(-\theta)$$

Hvis $\boldsymbol{M}$ roteres slik at egenaksene går langs x- og y-aksene så blir $\boldsymbol{N}$ en diagonalmatrise. Dette kalles å diagonalisere $\boldsymbol{M}$.

Omvendt så kan en diagonalmatrise $\boldsymbol{D}$ som skalerer langs x- og y-aksene roteres med en vinkel θ for å skalere langs andre akser, slik:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}(-\theta)\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}(\theta)$$

Translasjon (flytting)

Et punkt $\boldsymbol{p}$ kan transleres ved å legge til en vektor $\boldsymbol{d}$ slik at punktet blir flyttet til $\boldsymbol{p'}$ slik:

$$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d}$$

Å flytte i *retningen* til $\boldsymbol{d}$, en lengde på k, gjøres slik:

$$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|} \cdot k$$

Men for å translere punkter med matrisemultiplikasjon trengs homogene koordinater.

Homogene 2D-koordinater

Et punkt i planet kan representeres med vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Det samme punktet representeres i homogene koordinater slik:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogene transformasjoner

Homogene transformasjoner utføres alltid ved å gange en såkalt transformasjonsmatrise med en vektor. Resultatet er en ny vektor som er den transformerte vektoren.

Homogen translasjon i 2D

Et punkt $\boldsymbol{p}$ kan transleres til punktet $\boldsymbol{p'}$ med en vektor $\boldsymbol{a}$ og translasjonsmatrisen $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})$ definert slik:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogen rotasjon i 2D

Rotasjon som dreier en vektor mot klokken en vinkel θ:

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogen skalering i 2D

Transformasjon med en symmetrisk matrise $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & b & 0 \\ b & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kombinasjoner av transformasjoner

En transformasjon kan settes sammen av andre. F.eks. for å først rotere $\boldsymbol{p}$ med en vinkel på 45°, så translere med vektoren $\boldsymbol{a}$, og til slutt rotere med en vinkel på 32°:

$$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{R}(32°)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{R}(45°)\boldsymbol{p}$$

Merk at transformasjonen som utføres sist skal stå først!

Rotasjon/skalering om et punkt

En vanlig rotasjonstransformasjon vil utføres med origo som sentrum. For å rotere om en vilkårlig akse $\boldsymbol{a}$ brukes transformasjonen

$$\boldsymbol{R}(\theta, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{a})$$

Tilsvarende gjelder for skalering.

Rotasjoner i rommet

Rotasjon av en tredimensjonal vektor $\boldsymbol{r}$ kan utføres med en 3×3-matrise $\boldsymbol{M}$ med to parametere:

1) En enhetsvektor $\boldsymbol{n}$ som bestemmer rotasjonsakse og rotasjonsretning; Om $\boldsymbol{n}$ står vinkelrett ut fra midten av en klokke, vil rotasjonen foregå motsatt vei av viserene.

2) Rotasjonsvinkelen θ.

Den roterte vektoren $\boldsymbol{r'}$ kan regnes ut uten å bruke en rotasjonsmatrise, slik [1]:

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r}\cos\theta + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})(1 - \cos\theta) + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\sin\theta$$

Rotasjonsmatrisen blir slik:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \theta) = \boldsymbol{I}\cos\theta + \boldsymbol{N}(1 - \cos\theta) + \boldsymbol{A}\sin\theta$$

Der $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{N}$ og $\boldsymbol{A}$ er definert som følger:

$\boldsymbol{I}$ er den såkalte identitetsmatrisen, som er en diagonalmatrise med 1 langs diagonalen, altså

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{N}$ er tensorproduktet $\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$, dvs $N_{ij} = n_i n_j$:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} n_1n_1 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & n_2n_2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & n_3n_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Homogene 3D-koordinater

Et punkt i rommet kan representeres med vektoren

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Det samme punktet representeres i homogene koordinater slik:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogen translasjon i 3D

Translasjonsmatrisen $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})$ for 3 dimensjoner er definert slik:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogen rotasjon i 3D

Dette fungerer på tilsvarende måte som i 2D; Rotasjonsmatrisen $\boldsymbol{R}$ regnes ut og representeres i homogene koordinater med matrisen

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotasjon om vilkårlig akse

En rotasjon en vinkel θ om en akse som er parallell til vektoren $\boldsymbol{n}$, men som går gjennom punktet $\boldsymbol{a}$ er representert av matrisen

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \theta, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \theta)\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{a})$$

Syntaks i Maxima

Kommandoer gis til programmet med tekst + `Shift+Enter`. For å regne på vektorer og matriser må man først kjøre kommandoen `load(vect)`. Alle svar får navn på formen `%o`+tall og kan refereres til ved dette navnet i følgende utregninger. Sinus og cosinus regnes ut med funksjonene `sin()` og `cos()`. Programmet regner kun med radianer. Referer til π med `%pi`.

Lage en vektor: `p:[1,1,2]`

Legge sammen vektorer: `p+q`

Tall ganger vektor: `3*p`

Skalarprodukt: `p.q` (med punktum)

Lengde av vektor: `sqrt(p.p)`

Lage matrise: Velg i menyen: `Algebra`→`Enter Matrix`...

Gange matrise med vektor: `A.p`

Gange matrise med matrise: `A.B`

Kryssprodukt: `p~q`

Noen uttrykk må tvinges frem med: `express()`

Svar som desimaltall: `float()`

Antall siffer i svar kan stilles med: `fpprintprec:4`
Dette setter antall siffer i svar til 4.

Funksjoner kan lages med operatoren `:=`
F.eks. kan man bruke menyen for å sette inn en 2×2 rotasjonsmatrise og så navigere seg til uttrykket med piltastene og redigere så det ser slik ut (med shift+enter etterpå):

```
R(t):= matrix(
 [cos(t),-sin(t)],
 [sin(t),cos(t)]
);
```

For filer som åpnes i programmet wxMaxima, så må programmet regne ut alle uttrykkene på nytt. Dette gjøres med menyvalget `Cell`→`Evaluate All Cells` (Ctrl+R).

Om formelsamlingen

Denne formelsamlingen er laget av Jostein Trondal i April 2012, og er spesielt tilpasset faget MA-111 Matematikk for multimedia ved Universitetet i Agder i Grimstad. Takk til Leon Marbl for kommentar om trykkfeil!

Dette er versjon 5.

Kommentarer er velkomne og sendes til `jostein@trondal.no`

Siste versjon ligger forhåpentligvis her:

`http://trondal.com/vektor.pdf`

Referanser

[1] H. Goldstein, J. Charles P. Poole, and J. L. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3rd edition, 2000.